5

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版


山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

责任编辑　宋　涛　邱　蕾
封面设计　庞　婕　孙　佳

新版推荐

经典Б.П.吉米多维奇数学习题集系列

ISBN 978-7-5331-5896-5



定价：22.00元

5

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 5/费定晖,周学圣编演.—4版.—济南:山东科学技术出版社,2012
ISBN 978-7-5331-5896-5

Ⅰ.①吉... Ⅱ.①费... ②周... Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120111 号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解 5

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531) 82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531) 82098071

印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂
地址：潍坊市潍州路753号
邮编：261031 电话：(0536) 2116806

开本：787 mm × 1092mm 1/16
印张：17
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5896-5
定价：22.00 元

第四版前言

本书自 1979 年出版发行以来，历经 30 多个春秋，一直畅销不衰，深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下，对全书我不断地修订和补充，不断地修正错误，不断地替换更为简洁的解法和证明，力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性，以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书，对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，感到获益匪浅，赞誉其为学习数学分析"不可替代"之图书，对此我们倍感欣慰，鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请，并得到郭大钧教授的大力支持，仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作，以适应文化建设繁荣发展的需要，更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作：

第一，为全书 4462 题中的近三成的习题，根据题型的不同，在原题解的前面，分别或给出提示，或给出解题思路，或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题，怎样下手求解；启发读者怎样总结解题的规律；启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论，开拓视野，活跃思路；帮助读者逐步解决学习中的困难，为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二，根据当前的语言习惯，对全书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，更加简洁凝练。

第三，改正了第三版中的个别印刷错误，修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达；并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准。

第五，对全书的版面和开本重新进行了调整，使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功，"只看不练假把式"，数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的，我们编写本书，就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费 定 晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979年于济南

目录 MULU

第六章　多元函数微分学 …… 1
§1.　函数的极限. 连续性 …… 1
§2.　偏导数. 函数的微分 …… 18
§3.　隐函数的微分法 …… 53
§4.　变量代换 …… 82
§5.　几何上的应用 …… 114
§6.　泰勒公式 …… 133
§7.　多元函数的极值 …… 143
第七章　带参数的积分 …… 189
§1.　带参数的常义积分 …… 189
§2.　带参数的广义积分. 积分的一致收敛性 …… 202
§3.　广义积分号下的微分法和积分法 …… 218
§4.　欧拉积分 …… 246
§5.　傅里叶积分公式 …… 260

第六章　多元函数微分学

§1. 函数的极限. 连续性

1° **函数的极限**　设函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义. 若对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$，使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P,P_0)<\delta$，其中 $\rho(P,P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离，则有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2° **连续性**　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 在 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 在所给区域内的每一点连续，则称函数 $f(P)$ 在此区域内是连续的.

3° **一致连续性**　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在仅与 ε 有关的 $\delta>0$，使得对于区域 G 中的任何点 P',P''，只要

$$\rho(P',P'')<\delta,$$

便成立不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(P)$ 在区域 G 内是一致连续的.

有界闭区域内的连续函数在此区域内是一致连续的.

确定并画出下列函数的存在域：

【3136】　$u=x+\sqrt{y}$.

解　存在域为半平面，$y\geqslant 0$，如图 6.1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内.

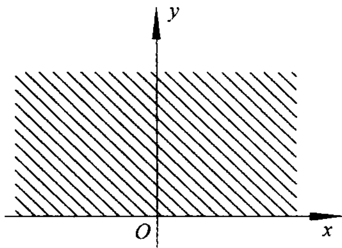


图 6.1

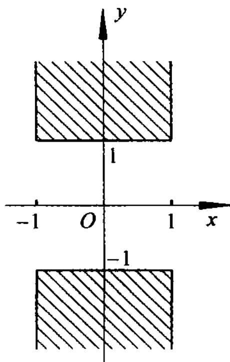


图 6.2

【3137】　$u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解　存在域为满足不等式 $|x|\leqslant 1$，$|y|\geqslant 1$ 的点集，如图6.2阴影部分所示，包括边界(粗实线)在内.

【3138】　$u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解　存在域为圆 $x^2+y^2\leqslant 1$，如图 6.3 阴影部分所示，包括圆周在内.

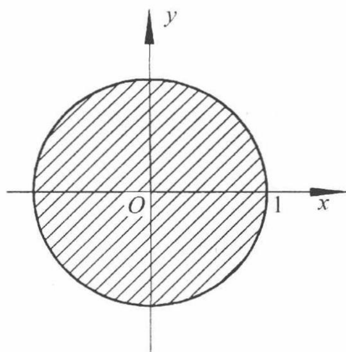


图 6.3

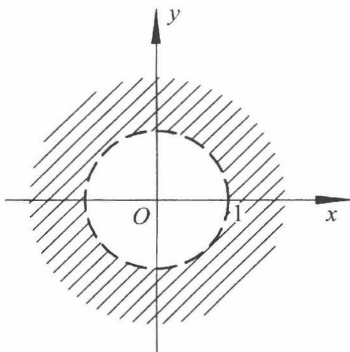


图 6.4

【3139】 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 存在域为满足不等式 $x^2+y^2>1$ 的点集，即圆 $x^2+y^2=1$ 的外面，如图 6.4 所示，不包括圆周（虚线）在内.

【3140】 $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解 存在域为满足不等式 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 的点集，如图 6.5 所示的环，包括边界在内.

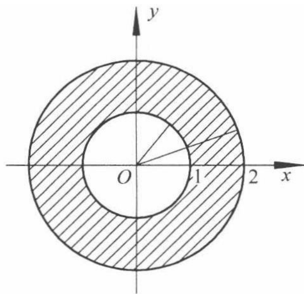


图 6.5

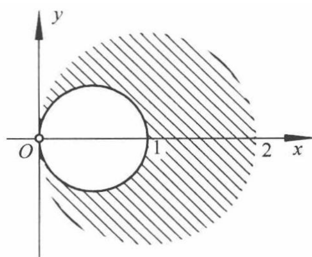


图 6.6

【3141】 $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域为满足不等式 $x\leqslant x^2+y^2<2x$ 的点集. 由 $x^2+y^2\geqslant x$ 得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出 $(x-1)^2+y^2<1$，两者组成一月形，如图 6.6 阴影部分所示，不包括大圆圆周在内，但包括小圆圆周.

【3142】 $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 存在域为满足不等式 $-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$ 的点集，如图 6.7 阴影部分所示，包括边界在内.

【3143】 $u=\ln(-x-y)$.

解 存在域为半平面 $x+y<0$，如图 6.8 阴影部分所示，不包括直线 $x+y=0$ 在内.

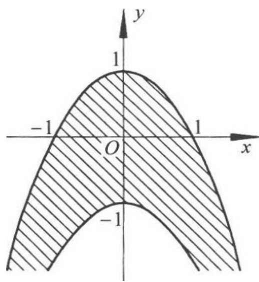


图 6.7

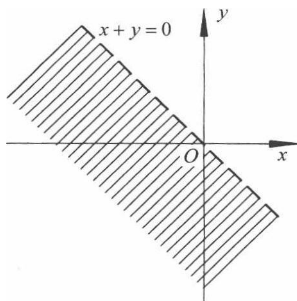


图 6.8

【3144】 $u=\arcsin\frac{y}{x}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{y}{x}\right|\leqslant 1 \quad \text{或} \quad |y|\leqslant|x| \quad (x\neq 0)$$

的点集,这是一对对顶的直角,如图 6.9 阴影部分所示,不包括原点在内.

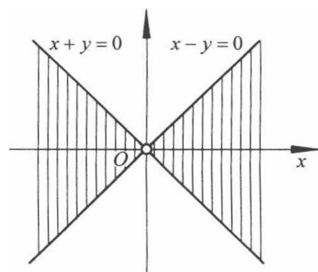


图 6.9

【3145】 $u=\arccos\frac{x}{x+y}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$$

的点集,由 $\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$ 得 $|x|\leqslant|x+y|$ $(x\neq -y)$,即 $x^2\leqslant x^2+2xy+y^2$ 或 $y(y+2x)\geqslant 0$,也即

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y\geqslant -2x, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y\leqslant 0, \\ y\leqslant -2x. \end{cases}$$

但 x,y 不能同时为零,这是由直线:$y=0$ 和 $y=-2x$ 所围成的一对对顶的角,如图 6.10 阴影部分所示,包括边界在内,但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在内.

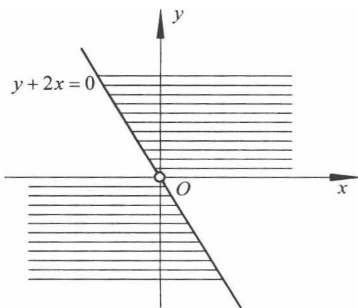


图 6.10

【3146】 $u=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1 \quad \text{及} \quad |1-y|\leqslant 1 \quad (y\neq 0)$$

的点集,即

$$\begin{cases} y^2\geqslant x, \\ 0<y\leqslant 2, \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} y^2\geqslant -x, \\ 0<y\leqslant 2. \end{cases}$$

这是由抛物线:$y^2=x$,$y^2=-x$ 和直线 $y=2$ 所围成的的曲边三角形,如图 6.11 阴影部分所示,不包括原点在内.

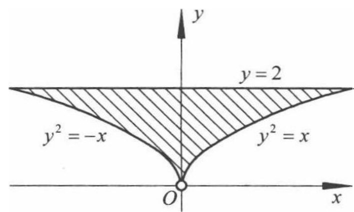


图 6.11

【3147】 $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

解 存在域为满足不等式

$$\sin(x^2+y^2)\geqslant 0 \quad \text{或} \quad 2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$$

$(k=0,1,2,\cdots)$ 的点集,如图 6.12 所示的同心环族.

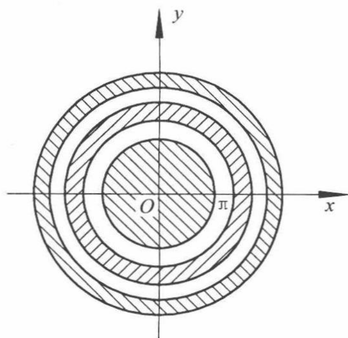
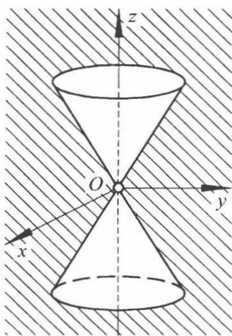


图 6.12

【3148】 $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 存在域为满足不等式 $\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$ 或 $x^2+y^2-z^2\geqslant 0$

(x,y 不同时为零)的点集,这是圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$ 的外面,如图 6.13 阴影部分所示,包括边界在内,但要除去圆锥的顶点.



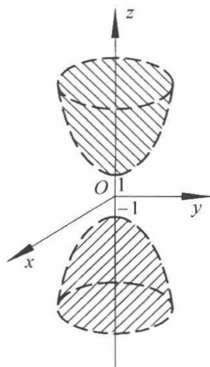


图 6.13　　　　图 6.14

【3149】 $u=\ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式 $xyz>0$ 的点集,即

$x>0,\ y>0,\ z>0;$ 或 $x>0,\ y<0,\ z<0;$

$x<0,\ y<0,\ z>0;$ 或 $x<0,\ y>0,\ z<0.$

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体,但不包括坐标面,由于图形为读者所熟知,故省略.以下有类似情况,不再说明.

【3150】 $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域为满足不等式 $-x^2-y^2+z^2>1$ 的点集.这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部,如图 6.14 阴影部分所示,不包括界面在内.

作出下列函数的等值线:

【3151】 $z=x+y$.

解 等值线为平行直线族 $x+y=k$,其中 k 为一切实数,如图 6.15 所示.

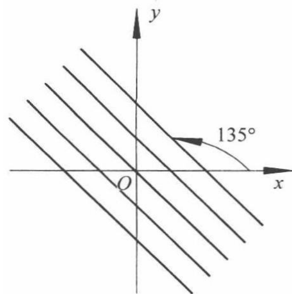


图 6.15

【3152】 $z=x^2+y^2$.

解 等值线为曲线族 $x^2+y^2=a^2 \quad (a\geqslant 0)$.
当 $a=0$ 时为原点；当 $a>0$ 时，等值线为以原点为圆心的同心圆族.

【3153】 $z=x^2-y^2$.

解 等值线为曲线族 $x^2-y^2=k$.
当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线：$y=x$, $y=-x$. 当 $k\neq 0$ 时为以 $y=\pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中当 $k>0$ 时顶点为 $(-\sqrt{k},0)$, $(\sqrt{k},0)$，当 $k<0$ 时顶点为 $(0,-\sqrt{-k})$, $(0,\sqrt{-k})$.

【3154】 $z=(x+y)^2$.

解 等值线为曲线族 $(x+y)^2=a^2 \quad (a\geqslant 0)$.
当 $a=0$ 时为直线 $x+y=0$. 当 $a\neq 0$ 时为与直线 $x+y=0$ 平行的且等距的直线 $x+y=\pm a$.

【3155】 $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等值线为以坐标原点为束心的直线束 $y=kx \quad (x\neq 0)$，
不包括 Oy 轴在内.

【3156】 $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等值线为椭圆族 $x^2+2y^2=a^2 \quad (a>0)$.
长半轴为 a，短半轴为 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为 $\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$ 及 $\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$.

【3157】 $z=\sqrt{xy}$.

解 等值线为曲线族 $xy=a^2 \quad (a\geqslant 0)$.
当 $a=0$ 时为坐标轴 $x=0$ 及 $y=0$. 当 $a>0$ 时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等边双曲线族，顶点为 $(-a,-a)$ 及 (a,a).

【3158】 $z=|x|+y$.

解 等值线为曲线族 $|x|+y=k$，
其中 k 为一切实数. 当 $x\geqslant 0$ 时为 $x+y=k$；当 $x<0$ 时为 $-x+y=k$. 这是顶点在轴 Oy 上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图 6.16 所示.

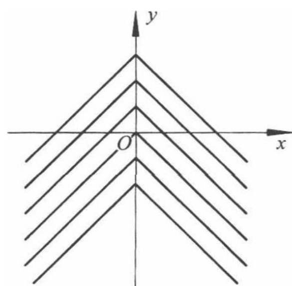


图 6.16

【3159】 $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等值线为曲线族 $|x|+|y|-|x+y|=a$.
因为恒有 $|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以 $a\geqslant 0$. 当 $a=0$ 时，由 $|x|+|y|=|x+y|$ 两边平方即得 $xy\geqslant 0$，
即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内.

当 $a>0$ 时，$xy<0$ 分下面四组求解：

(1) $x>0$, $y<0$, $x+y\geqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=-\dfrac{a}{2}$；

(2) $x>0$, $y<0$, $x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=\dfrac{a}{2}$；

(3) $x<0$, $y>0$, $x+y\geqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=-\dfrac{a}{2}$；

(4) $x<0$, $y>0$, $x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=\dfrac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6.17 所示.

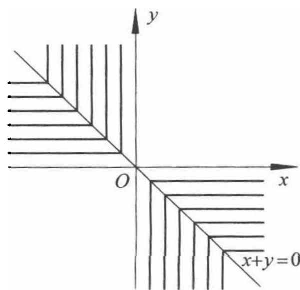


图 6.17

【3160】 $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等值线为曲线族 $\dfrac{2x}{x^2+y^2}=k \quad (x,y \text{ 不同时为零})$,

其中 k 为异于零的一切实数.上式可变形为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2(k\neq0).$$

当 $k=0$ 时,即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$,从而等值线为 $x=0$ 即 Oy 轴,但不包括原点.

当 $k\neq0$ 时为中心在 Ox 轴上且经过坐标原点(但不包括原点在内)的圆束,圆心在 $\left(\frac{1}{k},0\right)$ 半径为 $\left|\frac{1}{k}\right|$,如图 6.18 所示.

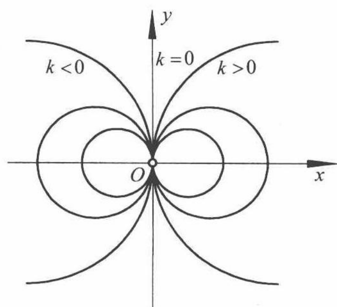


图 6.18

【3161】 $z=x^y\quad(x>0)$.

解 等值线为曲线族 $x^y=a\quad(a>0)$.
当 $a=1$ 时为直线 $x=1$ 及 Ox 轴的正向半射线,但不包括原点在内.

当 $0<a<1$ 与 $a>1$ 时的图像如图 6.19 所示.

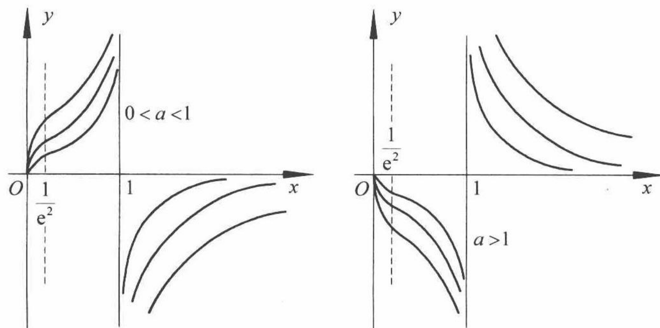


图 6.19

【3162】 $z=x^ye^{-x}(x>0)$.

解 等值线为曲线族 $x^ye^{-x}=a\ (a>0)$,即 $y\ln x-x=\ln a$.

当 $a=e^{-1}$ 时为直线 $x=1$ 和曲线 $y=\frac{x-1}{\ln x}$;当 $0<a<\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e}<a<1$ 或 $a\geqslant1$ 时图像布满整个右半平面,如图 6.20 所示,不包括 Oy 轴.

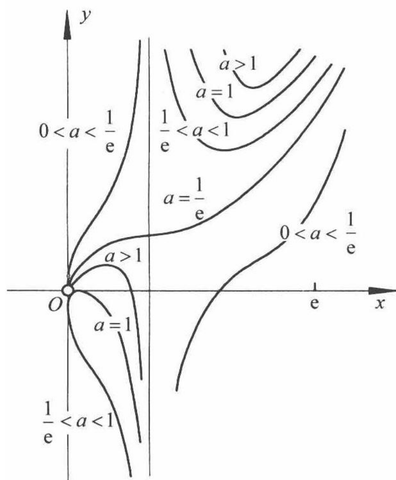


图 6.20

【3163】 $z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}}\quad(a>0)$.

解　等值线为曲线族
$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2 \quad (k>0).$$
整理得
$$(1-k^2)x^2-2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2+(1-k^2)y^2=0.$$
当 $k=1$ 时得 $x=0$，即 Oy 轴. 当 $k\neq1$ 时，上述方程可变形为
$$\left[x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$
这是以点 $\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2},0\right)$ 为圆心，半径为 $\left|\frac{2ak}{1-k^2}\right|$ 的圆族. 当 $0<k<1$ 时，圆分布在右半平面；当 $k>1$ 时，圆分布在左半平面.

如果注意到圆心与原点距离的平方为
$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2=\frac{a^2[(1-k^2)^2+4k^2]}{(1-k^2)^2}=a^2+\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$
即等值线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 在交点处的半径互相垂直(或圆心距与两圆的半径构成直角三角形)，便知等值线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 成正交. 如图 6.21 所示.

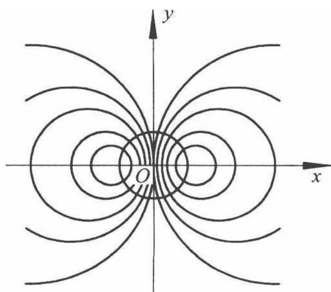


图 6.21

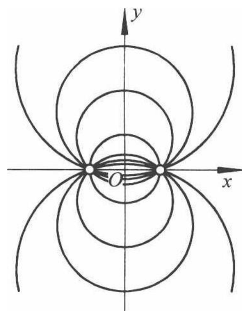


图 6.22

【3164】　$z=\arctan\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2} \quad (a>0).$

解　等值线为曲线族
$$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=k,$$
其中 k 为一切实数，但要除去点 $(-a,0)$ 及 $(a,0)$. 当 $k=0$ 时，$y=0$，即为 Ox 轴，但不包括上述两点；当 $k\neq0$ 时，方程可变形为
$$x^2+\left(y-\frac{a}{k}\right)^2=a^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right),$$
这是圆心在 Oy 轴上且经过点 $(-a,0)$ 及 $(a,0)$ 但不包括这两点在内的圆族，如图 6.22 所示.

【3165】　$z=\mathrm{sgn}(\sin x\sin y).$

解　若 $z=0$，则 $\sin x\sin y=0$，此即直线族
$$x=m\pi \quad 和 \quad y=n\pi \quad (m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$
若 $z=-1$ 或 $z=1$，则 $\sin x\sin y<0$ 或 $\sin x\sin y>0$，此即正方形系
$$m\pi<x<(m+1)\pi,\ n\pi<y<(n+1)\pi,$$
其中 $z=(-1)^{m+n}$. 如图 6.23 所示，$z=0$ 时为图中网格直线；$z=1$ 为图中带斜线的正方形；$z=-1$ 为图中空白正方形，但后两者都不包括边界.

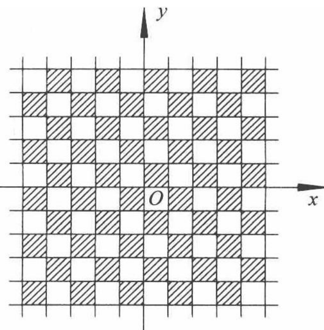


图 6.23

求下列函数的等值面：

【3166】　$u=x+y+z.$

解　等值面为平行平面族 $x+y+z=k$，其中 k 为一切实数.

【3167】　$u=x^2+y^2+z^2.$

解 等值面为中心在原点的同心球族 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a\geqslant 0)$，其中当 $a=0$ 时即为原点.

【3168】 $u=x^2+y^2-z^2$.

解 当 $u=0$ 时等值面为圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$；当 $u>0$ 时等值面为单叶双曲面族 $x^2+y^2-z^2=a^2$ $(a>0)$；当 $u<0$ 时等值面为双叶双曲面族 $-x^2-y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$.

【3169】 $u=(x+y)^2+z^2$.

解 等值面为曲面族 $$(x+y)^2+z^2=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为 $x+y=0$ 和 $z=0$. 当 $a>0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\dfrac{\pi}{4}+y\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\dfrac{\pi}{4}+y\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z. \end{cases}$$

这是旋转变换. 在新坐标系中原等值面方程转化为

$$2x'^2+z'^2=a^2,\quad 即\quad \frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面，母线的方向平行于 y' 轴，准线为 $y'=0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

长半轴为 a(z' 轴方向)，短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$(x' 轴方向).

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为

$$\begin{cases} x'=0, \\ z'=0, \end{cases}$$

而在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases} x+y=0, \\ z=0, \end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴.

【3170】 $u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$.

解 当 $u=0$ 时等值面为球心在原点的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=n\pi\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

当 $u=-1$ 或 $u=1$ 时等值面为球层族

$$n\pi<x^2+y^2+z^2<(n+1)\pi\quad (n=0,1,2,\cdots),$$

其中 $u=(-1)^n$.

根据曲面的已知方程研究其性质：

【3171】 $z=f(y-ax)$.

解 引入参数 t, s，将曲面方程 $z=f(y-ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=at+s, \\ z=f(s). \end{cases}$$

今固定 s,得到以 t 为参数的直线方程,其方向数为 $1, a, 0$. 因此,曲面为以 $1, a, 0$ 为母线方向的一个柱面. 令 $t=0$,可得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=s, \\ z=f(s), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=0, \\ z=f(y), \end{cases}$$

这是 $x=0$ 平面上的一条曲线,也是柱面 $z=f(y-ax)$ 的一条准线.

【3172】 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 这是绕 Oz 轴旋转的旋转曲面的标准形式. 令 $y=0$,得曲线

$$\begin{cases} y=0, \\ z=f(x) \quad (x\geqslant 0), \end{cases}$$

它是旋转曲线的一条母线.

【3173】 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s,将曲面方程 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=st, \\ z=tf(s) \end{cases} \quad (t\neq 0).$$

今固定 s,这是以 t 为参数的一条过原点的直线. 因此,所给曲面方程为顶点在原点的一锥面,但不包括原点在内. 令 $t=1$,得曲线

$$\begin{cases} x=1, \\ y=s, \\ z=f(s). \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=1, \\ z=f(y), \end{cases}$$

这是 $x=1$ 平面上的一条曲线,也是锥面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的一条准线.

【3174】+ * $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s,将曲面方程 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=st, \\ z=f(s). \end{cases}$$

今固定 s,这是一条过点 $(0,0,f(s))$ 的直线,方向数为 $1, s, 0$. 因此,它与 Oz 轴垂直,与 Oxy 平面平行,且其方向与 s 有关. 从而得知,曲面 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面. 一般说来,它既不是柱面,也不是锥面. 令 $t=1$,得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x=1, \\ z=f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz 轴垂直相交的直线. 这样的直线的全体,便构成由 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 所表示的直

---

* 题号右上角"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致,以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

【3175】 作出函数 $F(t)=f(\cos t,\sin t)$ 的图像，式中

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & y\geqslant x,\\ 0, & y<x.\end{cases}$$

解 按题设，当 $\sin t\geqslant\cos t$，即 $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant t\leqslant\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$F(t)=1$；而当 $\sin t<\cos t$，即 $-\frac{3}{4}\pi+2k\pi<t<\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时，$F(t)=0$. 如图 6.24 所示.

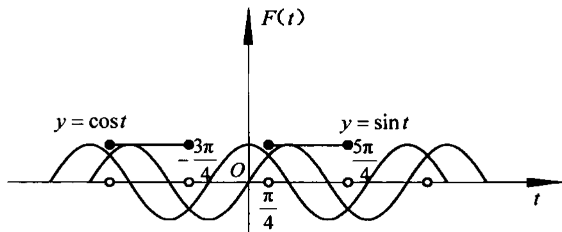


图 6.24

【3176】 若 $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f\left(1,\frac{y}{x}\right)$.

解 $f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{2\cdot1\cdot\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$.

【3177】 若 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

解 由 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ 知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

【3178】 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$. 若当 $y=1$ 时 $z=x$，求函数 f 和 z.

提示 易知 $f(t)=t^2+2t$，且 $z=\sqrt{y}+x-1$ $(x>0)$.

解 因为当 $y=1$ 时 $z=x$，所以，

$$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2],$$

从而得

$$f(t)=t(t+2)=t^2+2t,$$

且

$$z=\sqrt{y}+x-1\quad(x>0).$$

【3179】 设 $z=x+y+f(x-y)$. 若当 $y=0$ 时，$z=x^2$. 求函数 f 及 z.

提示 易知 $f(x)=x^2-x$，且 $z=(x-y)^2+2y$.

解 因为当 $y=0$ 时 $z=x^2$，所以，

$$x^2=x+f(x),\quad 即\quad f(x)=x^2-x,$$

且

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

【3180】 若 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

提示 易得

$$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=(x+y)^2\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}.$$

解 因为 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$,

所以，
$$f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}.$$

【3181】 证明：对于函数
$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y},$$
有
$$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to0}f(x,y)\}=1;\quad \lim_{y\to0}\{\lim_{x\to0}f(x,y)\}=-1,$$
从而，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在.

证明思路 前面两个累次极限等式易证，但因它们不相等，故知极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在.

证 $\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}=1,$

$\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}=\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim\limits_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1,$

由于两个单极限都存在，而累次极限不等，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在.

【3182】 证明：对于函数
$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$
有
$$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to0}f(x,y)\}=\lim_{y\to0}\{\lim_{x\to0}f(x,y)\}=0,$$
然而$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\to0}}f(x,y)$不存在.

证明思路 前面两个累次极限等式易证.尽管它们相等，但当点(x,y)沿直线$y=kx$的路径趋于$(0,0)$时，有
$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+(1-k)^2x^2}=\begin{cases}1, & k=1,\\0, & k=0.\end{cases}$$
于是，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在.

证 $\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}=\lim\limits_{x\to0}0=0,$

$\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}=\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}=\lim\limits_{y\to0}0=0.$

如果按$y=kx\to0$的方向取极限，则有
$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k)^2}.$$
特别地，分别取$k=0$及$k=1$，便得到不同的极限0及1.因此，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在.

【3183】 证明：对于函数
$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$
累次极限$\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}$和$\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}$不存在，但存在$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$.

证明思路 只要注意不等式$0\leqslant|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|$，即易证极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$存在且等于零.

由于极限$\lim\limits_{\substack{x\neq\frac{1}{k\pi}\\y\to0}}f(x,y)$及$\lim\limits_{\substack{y\neq\frac{1}{k\pi}\\x\to0}}f(x,y)$均不存在，其中$k=\pm1,\pm2,\cdots$，故两个累次极限不存在.

证 由不等式
$$0\leqslant\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$$
易知
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$$

但当$x\neq\frac{1}{k\pi}$，$y\to0$时，$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$的极限不存在，因此，累次极限$\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}$不存在.同法可证累次极限$\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}$也不存在.

【3184】 求$\lim\limits_{x\to a}\{\lim\limits_{y\to b}f(x,y)\}$及$\lim\limits_{y\to b}\{\lim\limits_{x\to a}f(x,y)\}$，设：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$; (2) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a=+\infty$, $b=+0$;

(3) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$; (4) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}\tan\dfrac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

(5) $f(x,y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

解

(1) $$\lim_{x\to\infty}\{\lim_{y\to\infty}f(x,y)\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}=\lim_{x\to\infty}0=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\{\lim_{x\to\infty}f(x,y)\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}=\lim_{y\to\infty}1=1;$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\{\lim_{y\to+0}f(x,y)\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\lim_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{y\to+0}\{\lim_{x\to+\infty}f(x,y)\}=\lim_{y\to+0}\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}=\lim_{y\to+0}1=1;$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\{\lim_{y\to\infty}f(x,y)\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}=\lim_{x\to\infty}0=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\{\lim_{x\to\infty}f(x,y)\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}=\lim_{y\to\infty}1=1;$$

(4) $$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to\infty}f(x,y)\}=\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\tan\frac{xy}{1+xy}\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\cdot\lim_{y\to\infty}\tan\frac{xy}{1+xy}\right\}=\lim_{x\to0}\{0\cdot\tan1\}=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\{\lim_{x\to0}f(x,y)\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{xy}\tan\frac{xy}{1+xy}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to0}\frac{\tan\frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{1+xy}\right\}=\lim_{y\to\infty}1=1;$$

(5) $$\lim_{x\to1}\{\lim_{y\to0}f(x,y)\}=\lim_{x\to1}\{\lim_{y\to0}\log_x(x+y)\}=\lim_{x\to1}\left\{\lim_{y\to0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x}=1,$$

$$\lim_{y\to0}\{\lim_{x\to1}f(x,y)\}=\lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\infty.$$

求下列二重极限:

【3185】 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

提示 注意由 $x^2+y^2\geqslant2|xy|$ 可得

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}.$$

解 由不等式 $x^2+y^2\geqslant2|xy|$ 得

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|}\leqslant\frac{|x+y|}{|xy|}\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|},$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right)=0$,故有 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$.

【3186】 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

提示 注意不等式 $0\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)(x^2+y^2\neq0)$.

解 由不等式 $0\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)$ $(x^2+y^2\neq0)$

及
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=0,$$

即得 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$.

【3187】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x}$.

提示 $\frac{\sin xy}{x}=\frac{\sin xy}{xy}\cdot y\ (y\neq 0)$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\left(\frac{\sin xy}{xy}\,y\right)=a$.

【3188】 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

提示 注意$(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=(x+y)^2\,e^{-(x+y)}-2(xe^{-x})(y\,e^{-y})$，并利用 564 题的结果.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}-2\frac{x}{e^x}\frac{y}{e^y}\right)=0^{*)}$.

*) 利用 564 题的结果.

【3189】 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

提示 注意 $0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$.

解 由不等式 $0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，

即得 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$.

【3190】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

提示 注意 $|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}|\ln(x^2+y^2)|$，并利用 1341 题的结果.

解 由不等式 $$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)}{4}|\ln(x^2+y^2)|$$

及 $$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{t\to+0}\frac{1}{4}t^2\ln t=0,$$

即得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1$.

【3191】 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\frac{x}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}e^{[x\ln(1+\frac{1}{x})]\frac{x}{x+y}}=e^{[\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})][\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x}{x+y}]}=e^{1\cdot 1}=e$.

【3192】 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}=\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{1}=\ln 2$.

【3193】$^+$ 若 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，问下列极限沿怎样的方向 φ 存在有限的极限值：

(1) $\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$； (2) $\lim\limits_{\rho\to+\infty}e^{x^2-y^2}\sin 2xy$.

解 (1) $\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}=\begin{cases}0, & \cos\varphi<0,\\ 1, & \cos\varphi=0,\\ +\infty, & \cos\varphi>0.\end{cases}$

于是，仅当 $\cos\varphi\leqslant 0$ 即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时，所给的极限才存在有限的极限值.

(2) $e^{x^2-y^2}\sin 2xy=e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$.

当 $\rho\to+\infty$ 时，$\sin(\rho^2\sin2\varphi)$ 有界，除 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0,1,2,3)$ 外无极限，且

$$\lim_{\rho\to+\infty}e^{\rho^2\cos2\varphi}=\begin{cases}0, & \cos2\varphi<0,\\ 1, & \cos2\varphi=0,\\ +\infty & \cos2\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当 $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$ 以及 $\varphi=0$，$\varphi=\pi$ 时，才存在有限的极限值.

求下列函数的不连续点：

【3194】 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点(0,0)无定义，故原点(0,0)为此函数的不连续点. 以下各题类似情况，不再说明.

【3195】 $u=\frac{xy}{x+y}$.

解 直线 $x+y=0$ 上的一切点均为 $u=\frac{xy}{x+y}$ 的不连续点.

【3196】 $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

解 对于任意不等于零的实数 a，有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3a^2}.$$

于是，对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O 外的一切点均为可移去的不连续点. 而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点.

【3197】 $u=\sin\frac{1}{xy}$.

解 $xy=0$ 上的一切点即两坐标轴上的诸点均为 $u=\sin\frac{1}{xy}$ 的不连续点.

【3198】 $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$.

解 直线 $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 上的各点均为 $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$ 的不连续点.

【3199】 $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

解 圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点是 $u=\ln(1-x^2-y^2)$ 的不连续点.

【3200】 $u=\frac{1}{xyz}$.

解 坐标面：$x=0$，$y=0$，$z=0$ 上各点均为 $u=\frac{1}{xyz}$ 的不连续点.

【3201】 $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

解 点 (a,b,c) 为

$$u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

的不连续点.

【3202】 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

分别对于每一个变量 x 或 y(当另一变量的值固定时)是连续的，但并非对这些变量的总体是连续的.

提示 对于命题的后半部分，只要证明极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在.

证 先固定 $y=a\neq0$，则得 x 的函数

$$g(x)=f(x,a)=\begin{cases}\dfrac{2ax}{x^2+a^2}, & x\neq0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即 $g(x)=\dfrac{2ax}{x^2+a^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$，它是处处有定义的有理函数. 又当 $y=0$ 时，$f(x,0)\equiv0$，它显然是连续的. 于是，当变数 y 固定时，函数 $f(x,y)$ 对于变量 x 是连续的. 同理可证，当变量 x 固定时，函数 $f(x,y)$ 对于变量 y 是连续的.

作为二元函数，$f(x,y)$ 虽在除点$(0,0)$外的各点均连续，但在点$(0,0)$不连续. 事实上，当动点 $P(x,y)$ 沿射线 $y=kx$ 趋于原点时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\(y=kx)}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的 k 可得不同的极限值，从而知$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在. 因此，函数 $f(x,y)$ 在原点不是二元连续的.

【3203】 证明：函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^4}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
在点 $O(0,0)$ 处沿过此点的每一射线 $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$ $(0\leqslant t<+\infty)$ 连续，即存在

$$\lim_{t\to0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0);$$

但此函数在点$(0,0)$并非连续的.

证 当 $\sin\alpha=0$ 时，$\cos\alpha=1$ 或 -1. 于是，当 $t\neq0$ 时，$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\dfrac{t^2\cdot0}{t^4+0}=0$，而 $f(0,0)=0$，故有

$$\lim_{t\to0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0).$$

当 $\sin\alpha\neq0$ 时，有

$$\lim_{t\to0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to0}\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}=\lim_{t\to0}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{0}{0+\sin^2\alpha}=0,$$

故 $\lim\limits_{t\to0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$.

其次，设动点 $P(x,y)$ 沿抛物线 $y=x^2$ 趋于原点，得

$$\lim_{\substack{x\to0\\(y=x^2)}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

因此，函数 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$不连续.

【3204】 证明：函数
$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq0,\\ 0, & y=0\end{cases}$$
的不连续点的集合不是闭集.

证 当 $y_0\neq0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)显见是连续的，即 $f(x,y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|$，故知 $f(x,y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0\neq0$ 时，对于点$(x_0,0)$，由于极限

$$\lim_{y\to0}f(x_0,y)=\lim_{y\to0}x_0\sin\frac{1}{y}$$

不存在，故知 $f(x,y)$ 在点$(x_0,0)$不连续.

这样，我们证明了，函数 $f(x,y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点. 显然，原点是不连续点集合的一个聚点，但它本身却不是 $f(x,y)$ 的不连续点. 因此，$f(x,y)$ 的不连续点的集合不是闭集.

【3205】 证明:若函数 $f(x,y)$ 在某区域 G 内对变量 x 是连续的,而关于 x 对变量 y 是一致连续的,则此函数在该区域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$.

由于 $f(x,y)$ 关于 x 对变量 y 一致连续,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$,使当 $(x,y')\in G$, $(x,y'')\in G$ 且 $|y'-y''|<\delta_1$ 时,就有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于变量 x 是连续的,故对上述的 ε,存在 $\delta_2>0$,使当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时,就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0<\delta\leqslant\min\{\delta_1,\delta_2\}$,并使点 (x_0,y_0) 的 δ 邻域全部包含在区域 G 内,则当点 $P(x,y)$ 属于点 (x_0,y_0) 的 δ 邻域,即 $|PP_0|<\delta$ 时,

$$|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2,\quad |y-y_0|<\delta\leqslant\delta_1.$$

从而有 $$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此,$f(x,y)$ 在点 P_0 连续.由 P_0 的任意性知,函数 $f(x,y)$ 在 G 内是连续的.

【3206】 证明:若在某区域 G 内函数 $f(x,y)$ 对变量 x 是连续的,并满足对变量 y 的利普希茨条件,即

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

式中 $(x,y')\in G$, $(x,y'')\in G$ 而 L 为常数,则此函数在该区域内是连续的.

提示 利用 3205 题的结果.

证 由于 $f(x,y)$ 在 G 内满足对 y 的利普希茨条件,故知 $f(x,y)$ 在 G 内关于 x 对变量 y 是一致连续的.

因此,由 3205 题的结果即知,$f(x,y)$ 在 G 内是连续的.

【3207】 证明:若函数 $f(x,y)$ 分别对每一个变量 x 和 y 是连续的,并对其中的一个是单调的,则此函数对两个变量的总体是连续的(杨定理).

证 不妨设 $f(x,y)$ 关于 x 是单调的.

设 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的定义域 G 内的任一点.由于 $f(x,y)$ 关于 x 连续,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$(假定 δ_1 足够小,使我们所考虑的点都落在 G 内),使当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时,就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0-\delta_1,y_0)$ 及 $(x_0+\delta_1,y_0)$,由于 $f(x,y)$ 关于 y 连续,故对上述的 ε,存在 $\delta_2>0$(也要求 δ_2 足够小,使所考虑的点落在 G 内),使当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时,就有

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $|\Delta x|<\delta$, $|\Delta y|<\delta$ 时,由于 $f(x,y)$ 关于 x 单调,故有

$$\begin{aligned}&|f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&\max\Big\{|f(x_0+\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|,|f(x_0-\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\Big\}.\end{aligned}$$

但是 $$\begin{aligned}&|f(x_0\pm\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&|f(x_0\pm\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|+|f(x_0\pm\delta_1,\ y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故当 $|\Delta x|<\delta$, $|\Delta y|<\delta$ 时,就有

$$|f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是连续的.由点 (x_0,y_0) 的任意性知,$f(x,y)$ 是 G 内的二元连续函数.

【3208】 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$ 上是连续的，而函数序列 $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛并满足条件 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$. 证明：函数序列

$$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]\quad(n=1,2,\cdots)$$

也在 $[a,A]$ 上一致收敛.

证 由于 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$，故 $F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]$ 有意义.

由题设 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$ 上连续，故在此区域上一致连续，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于此区域中的任意两点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$ 时，就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

特别地，当 $|y_1-y_2|<\delta$ 时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon.$$

对于上述的 $\delta>0$，因为 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，故存在正整数 N，使当 $m>N$，$n>N$ 时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\delta.$$

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $m>N$，$n>N$ 时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|F_n(x)-F_m(x)|=|f[x,\varphi_n(x)]-f[x,\varphi_m(x)]|<\varepsilon.$$

因此，$F_n(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛.

【3209】 设：1）函数 $f(x,y)$ 在区域 $R(a<x<A;\ b<y<B)$ 内连续；2）函数 $\varphi(x)$ 在区间 (a,A) 内连续，且函数值属于区间 (b,B). 证明：函数 $F(x)=f[x,\varphi(x)]$ 在区间 (a,A) 内连续.

证 设点 (x_0,y_0) 为区域 R 内的任一点. 由题设知函数 $f(x,y)$ 在区域 R 内连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ $((x,y)\in R)$ 时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由 $\varphi(x)$ 在 (a,A) 内的连续性可知，对上述的 $\delta>0$，存在 $\eta>0$（可取 $\eta<\delta$），使当 $|x-x_0|<\eta$ $(x\in(a,A))$ 时，恒有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\delta.$$

于是，

$$|f[x,\varphi(x)]-f[x_0,\varphi(x_0)]|<\varepsilon,$$

即

$$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(x)$ 在点 x_0 处连续. 由点 x_0 的任意性知，函数 $F(x)$ 在 (a,A) 内是连续的.

【3210】 设：1）函数 $f(x,y)$ 在区域 $R(a<x<A;\ b<x<B)$ 内连续；2）函数 $x=\varphi(u,v)$ 及 $y=\psi(u,v)$ 在区域 $R'(a'<u<A;\ b'<v<B')$ 内连续，且函数值分别属于区间 (a,A) 和 (b,B). 证明：函数

$$F(u,v)=f[\varphi(u,v),\ \psi(u,v)]$$

在区域 R' 内连续.

证 以下假定所取的 δ 或 η 足够小，使点的 δ 或 η 邻域都在所给的区域内.

设点 (x_0,y_0) 为区域 R 内的任一点，注意到 $f(x,y)$ 在 R 内连续，即知对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$.

再由 φ 及 ψ 的连续性知，对于上述的 δ，存在 $\eta>0$，使当 $|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$，时，就有

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

其中 $x_0=\varphi(u_0,v_0)$，$y_0=\psi(u_0,v_0)$.

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使当 $|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$ 时，就有

$$|f[\varphi(u,v),\ \psi(u,v)]-f[\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)]|<\varepsilon.$$

即

$$|F(u,v)-F(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 连续，由点 (u_0,v_0) 的任意性知，函数 $F(u,v)$ 在区域 R' 内连续.

§2. 偏导数. 函数的微分

1° **偏导数** 在求多元函数的偏导数时，若计算中出现的所有偏导数均连续，则求导的结果与求导的次序无关.

2° **函数的微分** 若自变量 x,y,z 的函数 $f(x,y,z)$ 的全增量可写为以下形式：

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$$

式中 A,B,C 与 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 无关而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，则称函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 可微，而增量的线性部分 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$，即

$$df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz, \tag{1}$$

(其中 $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, $dz=\Delta z$)称为此函数的微分.

当变数 x,y,z 为其他自变量的可微函数时，公式(1)仍有其意义.

若 x,y,z 为自变量，且函数 $f(x,y,z)$ 有连续的直至 n 阶的偏导数，则对于高阶的微分，有符号公式：

$$d^n f(x,y,z)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z).$$

3° **复合函数的导数** 若 $w=f(x,y,z)$ 可微，其中 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$，且函数 φ,ψ,χ 可微，则

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶偏导数时最好用下列符号公式：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

其中
$$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\quad Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\quad R_1=\frac{\partial z}{\partial u},\quad R_2=\frac{\partial x}{\partial v},\quad Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\quad R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° **方向导数** 若用方向余弦 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 表示 $Oxyz$ 空间内的方向 l，且函数 $u=f(x,y,z)$ 可微，则沿方向 l 的导数按下式来计算：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

函数在给定点的最大增长速度的大小与方向何用一个向量——函数的梯度

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

给出，它的大小等于
$$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

【3211】 证明：
$$f'_x(x,b)=\frac{d}{dx}[f(x,b)].$$

提示 令 $\varphi(x)=f(x,b)$，命题即易获证.

注意在求某一固定点的导数及微分时，用本题的结果常可减少运算量. 例如，3212 题中，由于 $f(x,1)=x$，故 $f'_x(x,1)=1$.

证 令 $\varphi(x)=f(x,b)$，则

$$\frac{d}{dx}[f(x,b)]=\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}=f'_x(x,b).$$

【3212】 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f'_x(x,1)$.

解 由于 $f(x,1)=x$，故 $f'_x(x,1)=1$.

求下列函数的一阶和二阶偏导数：

【3213】 $u=x^4+y^4-4x^2y^2$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-16xy$ [*)].

*） 以下各题不再写$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，而仅写$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，因为当它们连续时是相等的，并且在今后各题中均把$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$理解为$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$.

【3214】 $u=xy+\dfrac{x}{y}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2x}{y^3}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1-\dfrac{1}{y^2}$.

【3215】 $u=\dfrac{x}{y^2}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2x}{y^3}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{6x}{y^4}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{2}{y^3}$.

【3216】 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{2x\cdot x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{3}{2}y^2\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=-\dfrac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{3}{2}xy\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{3y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$.

【3217】 $u=x\sin(x+y)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y)$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos(x+y)+\cos(x+y)-x\sin(x+y)=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\sin(x+y)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$.

【3218】 $u=\dfrac{\cos x^2}{y}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2x\sin x^2}{y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\cos x^2}{y^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2\cos x^2}{y^3}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{2x\sin x^2}{y^2}$.

【3219】 $u=\tan\dfrac{x^2}{y}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{y}\sec^2\dfrac{x^2}{y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{y^2}\sec^2\dfrac{x^2}{y}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2}{y}\sec^2\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{2x}{y}\cdot 2\sec^2\dfrac{x^2}{y}\cdot\tan\dfrac{x^2}{y}\cdot\dfrac{2x}{y}=\dfrac{2}{y}\sec^2\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{8x^2}{y^2}\sec^3\dfrac{x^2}{y}\sin\dfrac{x^2}{y}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2x^2}{y^3}\sec^2\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{2x^4}{y^4}\sec^3\dfrac{x^2}{y}\sin\dfrac{x^2}{y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{2x}{y^2}\sec^2\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{4x^3}{y^3}\sec^3\dfrac{x^2}{y}\sin\dfrac{x^2}{y}$.

【3220】 $u=x^y$.

解 由 $u=x^y=e^{y\ln x}$ 即得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{y\ln x}\cdot \ln x=x^y\ln x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x)\quad (x>0).$$

【3221】 $u=\ln(x+y^2)$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{x+y^2}-\frac{2y2y}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

【3222】 $u=\arctan\frac{y}{x}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{y2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

【3223】 $u=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$.

提示 利用 776 题的结果易获解. 直接求导也易获解.

解 由 776 题知 $\arctan\frac{x+y}{1-xy}=\arctan x+\arctan y-\varepsilon\pi$,其中 $\varepsilon=0,1$ 或 -1. 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

本题如不用 776 题的结果,直接求导也可获解. 例如,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

【3224】 $u=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

提示 注意 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{}^{*)}=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\left[-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^{*)}=-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{|y|}=-\frac{x\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}\right]=-\frac{x|y|(x^2+y^2)-xy\left[\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)+2y|y|\right]}{y^2(x^2+y^2)^2}=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)-2y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2\operatorname{sgn}y-y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn}y}{(x^2+y^2)^2}\qquad (y\neq 0).$$

*) 利用 3216 题的结果.

【3225】 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

提示 先求$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，再利用对称性，即得$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

利用对称性，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

【3226】 $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$.

解 $u=x^zy^{-z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=zx^{z-1}y^{-z}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-zx^zy^{-z-1}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z(z-1)x^{z-2}y^{-z}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(-z)(-z-1)x^zy^{-z-2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(\frac{z}{x}u\right)'_y=\frac{z}{x}\left[-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\right]=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(-\frac{z}{y}u\right)'_z=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z=-\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\left(u\ln\frac{x}{y}\right)'_z=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z=\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\qquad\left(\frac{x}{y}>0\right).$$

【3227】 $u=x^{\frac{y}{z}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x=\frac{u\ln x}{z}$，

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x=-\frac{yu\ln x}{z^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{xyz\frac{\partial u}{\partial x}-yzu}{x^2z^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\ln x}{z}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln^2 x}{z^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-y\ln x\left[\frac{z^2\frac{\partial u}{\partial z}-2uz}{z^4}\right]=\frac{yu\ln x(2z+y\ln x)}{z^4},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xz}\left(u+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{u(z+y\ln x)}{xz^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\ln x\left(\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{u}{z^2}\right)=-\frac{u\ln x(z+y\ln x)}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{y}{z^2}\left(\ln x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}\right)=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3}.$$

【3228】 $u=x^{y^z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1}=\frac{uy^z}{x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x=zuy^{z-1}\ln x$，

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}y^z\ln x\ln y=uy^z\ln x\ln y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^z\left(-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{uy^z(y^z-1)}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=z\ln x\left[y^{z-1}\frac{\partial u}{\partial y}+(z-1)y^{z-2}u\right]=uzy^{z-2}\ln x(zy^z\ln x+z-1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(y^z\frac{\partial u}{\partial z}+uy^z\ln y\right)\ln x\ln y=uy^z\ln x\ln^2 y(1+y^z\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\left(y^z\frac{\partial u}{\partial y}+uzy^{z-1}\right)=\frac{uzy^{z-1}(y^z\ln x+1)}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(y^{z-1}u+uzy^{z-1}\ln y+zy^{z-1}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\ln x=uy^{z-1}\ln x[1+z\ln y(1+y^z\ln x)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=y^z\ln y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ln x+\frac{u}{x}\right)=\frac{uy^z\ln y(y^z\ln x+1)}{x}\quad (x>0,\ y>0).$$

【3229】 设 (1)$u=x^2-2xy-3y^2$； (2)$u=x^{y^2}$； (3)$u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$，

验证等式
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

提示 (3) 注意应就 $0<x\leqslant y$ 及 $y\leqslant x<0$ 两种情况加以验证.

证 (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-2y$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-2x-6y$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2$， $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-2$，

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2x^{y^2-1}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=2yx^{y^2}\ln x\quad (x>0)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yx^{y^2-1}+2y^3x^{y^2-1}\ln x,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=2y^3x^{y^2-1}\ln x+2yx^{y^2-1},$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

(3) 当 $0<x\leqslant y$ 时，我们有

$$u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}=\arccos\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}}+\frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $0<x\leqslant y$ 时，有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

当 $y\leqslant x<0$ 时，$u=\arccos\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right]=-\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}}+\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}(x-y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $y\leqslant x<0$ 时，也有 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

仔细观察可以看到，在不同的区域上，一阶偏导数相差一个符号，但二阶混合偏导数却是相等的.

【3230】 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2=0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$

证明：$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

证明思路 先由导数定义求得 $f'_x(0,y)=-y$ 及 $f'_y(x,0)=x$. 再利用 3211 题的结果，即易获证.

证 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x}=-y,$$

故 $f'_x(0,y)=-y$，从而，$$f''_{xy}(0,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[f'_x(0,y)]\Big|_{y=0}=-1.$$

同法可求得 $f'_y(x,0)=x$，从而，$f''_{yx}(0,0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f'_y(x,0)]\Big|_{x=0}=1.$

于是，$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

【3231】 设 $u=f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数，就下列各题验证关于齐次函数的欧拉定理：

(1) $u=(x-2y+3z)^2$； (2) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$； (3) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

解题思路 为了书写的简便，我们仅限于讨论三个变量的情形. 即只要证明下列等式

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

对于(1)$n=2$，(2)$n=0$，(3)$n=0$.

证 关于 n 次齐次函数的欧拉定理如下：

设 n 次齐次函数 $f(x,y,z)$* 在区域 A 中关于所有变量均有连续偏导数，则下述等式成立：

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

(1)由于 $(tx-2ty+3tz)^2=t^2u$，故 u 为二次齐次函数. 又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-2y+3z),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-4(x-2y+3z),\quad \frac{\partial u}{\partial z}=6(x-2y+3z),$$

故得 $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=(x-2y+3z)(2x-4y+6z)=2u,$$

即函数 u 满足欧拉定理.

(2) 由于对任何的 $t>0$，$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=t^0\cdot u,$$

故 u 为零次齐次函数. 又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故得 $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(xy^2+xz^2-xy^2-xz^2)=0\cdot u,$$

即函数 u 满足欧拉定理.

(3)由于 $$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{ty}{tz}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}=t^0\cdot u\quad(t>0),$$

故函数 u 为零次齐次函数. 又因

---

* 为了书写的简便，在这里我们仅限于讨论三个变量的情形.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)'_y=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\left[\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\ \frac{1}{y}\right]=\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

故得 $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\frac{yu}{xz}+y\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)-z\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y}=0\cdot u,$$

即函数 u 满足欧拉定理.

【3232】 证明:若可微函数 $u=f(x,y,z)$满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

证明思路 任意固定区域中一点(x_0,y_0,z_0),令 $F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}$,应用复合函数求导法则及题设条件可得 $F'(t)=0$. 由此可知:$F(t)=c\ (t>0)$. 令 $t=1$,即得 $c=f(x_0,y_0,z_0)$. 于是,$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^n\cdot f(x_0,y_0,z_0)$. 命题获证.

证 任意固定区域中一点(x_0,y_0,z_0),考察下面 t 的函数$(t>0)$:

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n},$$

它当 $t>0$ 时有定义且是可微的. 应用复合函数的求导法则,对 t 求导数即得

$$F'(t)=\frac{1}{t^n}\{x_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+y_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+z_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)\}-\frac{n}{t^{n+1}}f(tx_0,ty_0,tz_0)$$

$$=\frac{1}{t^{n+1}}\{tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)-nf(tx_0,ty_0,tz_0)\},$$

由于 $$tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)=nf(tx_0,ty_0,tz_0),$$

故 $$F'(t)=0.$$

从而,当 $t>0$ 时,$F(t)=c$,其中 c 为常数. 现在确定 c. 为此,在定义 $F(t)$的等式中令 $t=1$,则得

$$c=f(x_0,y_0,z_0).$$

于是, $$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}=f(x_0,y_0,z_0),$$

即 $$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^nf(x_0,y_0,z_0).$$

上式说明函数 $f(x,y,z)$为一个 n 次的齐次函数,这就是所要证明的.

【3233】 证明:若 $f(x,y,z)$是可微的 n 次齐次函数,则其偏导数 $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$, $f'_z(x,y,z)$是$(n-1)$次的齐次函数.

证明思路 由等式 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$ 两端分别对 x,y,z 求偏导数即获证.

证 由等式 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$ 两端分别对 x,y,z 求偏导数,则得

$$tf'_1(tx,ty,tz)=t^nf'_1(x,y,z),\quad tf'_2(tx,ty,tz)=t^nf'_2(x,y,z),\quad tf'_3(tx,ty,tz)=t^nf'_3(x,y,z).$$

其中 $f'_1(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f'_2(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f'_3(\cdot,\cdot,\cdot)$分别代表 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$对第一个,第二个,第三个变量的偏导数. 于是,

$$f'_1(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_1(x,y,z),\quad f'_2(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_2(x,y,z),\quad f'_3(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_3(x,y,z),$$

即偏导数 $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$及 $f'_z(x,y,z)$均为$(n-1)$次的齐次函数.

【3234】 设 $u=f(x,y,z)$是二阶可微的 n 次齐次函数. 证明:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=n(n-1)u.$$

证明思路 利用 3233 题的结果,并应用关于齐次函数的欧拉定理,即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (3)$$

以上(1)、(2)、(3)各式的两端分别依次乘以 x、y、z，然后相加，命题即可获证.

证 由 3233 题知：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$均为$(n-1)$次齐次函数.应用欧拉定理，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (3)$$

将(1)式两端乘以 x，(2)式两端乘以 y，(3)式两端乘以 z，然后相加，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=(n-1)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=n(n-1)u,$$

这就是所要证明的等式.

求下列函数的一阶和二阶微分(x,y,z为自变量)：

【3235】 $u=x^m y^n$.

解 $du=x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy)$,

$$d^2u=m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2+2mnx^{m-1}y^{n-1}dxdy+n(n-1)x^m y^{n-2}dy^2$$
$$=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2dx^2+2mnxy\,dxdy+n(n-1)x^2dy^2].$$

【3236】 $u=\frac{x}{y}$.

解 $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$,

$$d^2u=\frac{y^2(dxdy-dxdy)-2ydy(ydx-xdy)}{y^4}=-\frac{2}{y^3}(ydx-xdy)dy.$$

【3237】 $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$d^2u=\frac{d(xdx+ydy)}{\sqrt{x^2+y^2}}+(xdx+ydy)d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{dx^2+dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【3238】 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$,

$$d^2u=\frac{d(xdx+ydy)}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

【3239】 $u=e^{xy}$.

解 $du=e^{xy}(ydx+xdy)$,

$$d^2u=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]=e^{xy}[y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2].$$

【3240】 $u=xy+yz+zx$.

解 $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, $d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx)$.

【3241】 $u=\frac{z}{x^2+y^2}$.

解 $du=-\frac{2z}{(x^2+y^2)^2}(xdx+ydy)+\frac{dz}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}$,

$$d^2u=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\{(x^2+y^2)^2[2(xdx+ydy)dz-2(xdx+ydy)dz-2z(dx^2+dy^2)]$$
$$-4(x^2+y^2)(xdx+ydy)[(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)]\}$$
$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^3}\{2z[(3x^2-y^2)dx^2+8xydxdy+(3y^2-x^2)dy^2]-4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz\}.$$

【3242】 设 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$,求 $df(1,1,1)$及 $d^2f(1,1,1)$.

解题思路 本题宜利用 3211 题的结果,先求出 $f'_x(x,1,1)$、$f'_y(1,y,1)$及 $f'_z(1,1,z)$后,得到 $f'_x(1,1,1)$、$f'_y(1,1,1)$及 $f'_z(1,1,1)$.

再次,利用同样的思路,由 $f'_x(x,1,1)$、$f'_x(1,y,1)$、$f'_x(1,1,z)$,$f'_y(1,y,1)$、$f'_y(1,1,z)$及$f'_z(1,1,z)$,可求得 $f''_{xx}(1,1,1)$、$f''_{xy}(1,1,1)$、$f''_{xz}(1,1,1)$、$f''_{yy}(1,1,1)$、$f''_{yz}(1,1,1)$及 $f''_{zz}(1,1,1)$.

最后,利用一阶微分及二阶微分的定义即可得

$$df(1,1,1)=dx-dy,\quad d^2f(1,1,1)=2(dy-dx)(dy+dz).$$

解 本题将采用分别先求一阶及二阶偏导数,然后再合成以求一阶及二阶微分的方法.由于

$f'_x(x,1,1)=1$, $f'_x(1,1,1)=1$, $f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2}$, $f'_y(1,1,1)=-1$, $f'_z(1,1,z)=0$,

$f'_z(1,1,1)=0$,

故得 $\quad df(1,1,1)=f'_x(1,1,1)dx+f'_y(1,1,1)dy+f'_z(1,1,1)dz=dx-dy.$

又因 $f'_x(x,1,1)=1$, $\quad f''_{xx}(x,1,1)=0$, $\quad f''_{xx}(1,1,1)=0$,

$f'_x(1,y,1)=\frac{1}{y}$, $\quad f''_{xy}(1,y,1)=-\frac{1}{y^2}$, $\quad f''_{xy}(1,1,1)=-1$,

$f'_x(1,1,z)=\frac{1}{z}$, $\quad f''_{xz}(1,1,z)=-\frac{1}{z^2}$, $\quad f''_{xz}(1,1,1)=-1$,

$f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2}$, $\quad f''_{yy}(1,y,1)=\frac{2}{y^3}$, $\quad f''_{yy}(1,1,1)=2$,

$f'_y(1,1,z)=-\frac{1}{z}$, $\quad f''_{yz}(1,1,z)=\frac{1}{z^2}$, $\quad f''_{yz}(1,1,1)=1$,

$f'_z(1,1,z)=0$, $\quad f''_{zz}(1,1,z)=0$, $\quad f''_{zz}(1,1,1)=0$,

故得 $\quad d^2f(1,1,1)=f''_{xx}(1,1,1)dx^2+f''_{yy}(1,1,1)dy^2+f''_{zz}(1,1,1)dz^2+2f''_{xy}(1,1,1)dxdy$
$\quad +2f''_{yz}(1,1,1)dydz+2f''_{xz}(1,1,1)dxdz$
$\quad =2dy^2-2dxdy+2dydz-2dxdz=2(dy-dx)(dy+dz).$

【3243】 证明:若 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $d^2u\geqslant 0$.

证明思路 由微分的运算法则,易得 $du=\frac{xdx+ydy+zdz}{u}$,及

$$d^2u=\frac{1}{u^3}[(xdy-ydx)^2+(ydz-zdy)^2+(zdx-xdz)^2],$$

并注意 $u>0$(在原点处 du 不存在).

证 $du=\frac{xdx+ydy+zdz}{u}$,

$d^2u=\frac{1}{u^2}[u(dx^2+dy^2+dz^2)-(xdx+ydy+zdz)du]=\frac{1}{u^3}[(xdy-ydx)^2+(ydz-zdy)^2+(zdx-xdz)^2].$

由于 $u>0$(在原点处 du 不存在),故 $d^2u\geqslant 0$.

【3244】 假定 x,y 的绝对值很小,对下列各式推出近似公式:

(1) $(1+x)^m(1+y)^n$；　(2) $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$；　(3) $\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$.

解题思路　(1)令 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$，并利用近似等式

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y.$$

(2)令 $f(x,y)=\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$，并利用近似等式

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(0,0)x^2+2f''_{xy}(0,0)xy+f''_{yy}(0,0)y^2].$$

(3)仿(1)的解法.

解　(1) 设 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$，则

$$f'_x(x,0)=m(1+x)^{m-1},\quad f'_x(0,0)=m,\quad f'_y(0,y)=n(1+y)^{n-1},\quad f'_y(0,0)=n.$$

于是，$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=1+mx+ny,$$

即有近似公式　$(1+x)^m(1+y)^n\approx1+mx+ny$.

(2) 设 $f(x,y)=\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$，则

$$f'_x(x,0)=0,\quad f'_x(0,0)=0,\quad f'_y(0,y)=0,\quad f'_y(0,0)=0,$$
$$f''_{xx}(x,0)=0,\quad f''_{xx}(0,0)=0,\quad f''_{yy}(0,y)=0,\quad f''_{yy}(0,0)=0,$$
$$f'_x(0,y)=\ln(1+y),\quad f''_{xy}(0,y)=\frac{1}{1+y},\quad f''_{xy}(0,0)=1.$$

于是，$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+\dfrac{1}{2!}[f''_{xx}(0,0)x^2+2f''_{xy}(0,0)xy+f''_{yy}(0,0)y^2]=xy$，

即有近似公式　$$\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)\approx xy.$$

本题如不用求偏导数的方法，也可直接获解：

$$\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)=[x+o(x)]\,[y+o(y)]\approx xy.$$

(3) 设 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$，则

$$f'_x(x,0)=\frac{1}{1+x^2},\quad f'_x(0,0)=1,\quad f'_y(0,y)=\frac{1}{1+y^2},\quad f'_y(0,0)=1.$$

于是，$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=x+y,$$

即有近似公式　$\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}\approx x+y$.

【3245】　用微分来代替函数的增量，近似地计算：

(1) $1.002\times2.003^2\times3.004^3$；　(2) $\dfrac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98}\sqrt[4]{1.05^3}}$；　(3) $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$；

(4) $\sin29^\circ\tan46^\circ$；　(5) $0.97^{1.05}$.

解　(1) 设 $f(x,y,z)=(1+x)^m(1+y)^n(1+z)^l$，则当 $|x|,|y|,|z|$ 甚小时，有近似公式(参阅3244(1))

$$f(x,y,z)\approx1+mx+ny+lz.$$

利用上式即得

$$1.002\times2.003^2\times3.004^3=(1+0.002)\cdot2^2\left(1+\frac{0.003}{2}\right)^2\cdot3^3\left(1+\frac{0.004}{3}\right)^3$$

$$\approx1\cdot2^2\cdot3^3\left(1+0.002+2\,\frac{0.003}{2}+3\,\frac{0.004}{3}\right)=108.972;$$

(2) $$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98}\sqrt[4]{1.05^3}}=(1+0.03)^2(1-0.02)^{-\frac{1}{3}}(1+0.05)^{-\frac{1}{4}}$$

$$\approx1+2\times0.03+\left(-\frac{1}{3}\right)(-0.02)+\left(-\frac{1}{4}\right)0.05\approx1.054;$$

(3) $$\sqrt{1.02^3+1.97^3}=(1.97)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{0.03}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 2^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{3}{2}\left(-\frac{0.03}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^{3}\right]\approx 2.958;$$

(4) 设 $f(x,y)=\sin x\tan y$，则有近似公式

$$f(x,y)\approx \sin x_0\tan y_0+\cos x_0\tan y_0(x-x_0)+\frac{\sin x_0}{\cos^2 y_0}(y-y_0).$$

在本题中，令 $x_0=\frac{\pi}{6}$，$y_0=\frac{\pi}{4}$，$x-x_0=-\frac{\pi}{180}$，$y-y_0=\frac{\pi}{180}$，即得

$$\sin 29^\circ\tan 46^\circ\approx \sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}\left(-\frac{\pi}{180}\right)+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{180}\right)\approx 0.502;$$

(5) 设 $f(x,y)=x^y$，由于

$$f'_x(1,1)=\frac{d}{dx}f(x,1)\Big|_{x=1}=1,\qquad f'_y(1,1)=\frac{d}{dy}f(1,y)\Big|_{y=1}=0,$$

于是，$x^y\approx x$. 所以，我们有 $0.97^{1.05}\approx 0.97$.

【3246】 设矩形的边 $x=6\text{m}$ 和 $y=8\text{m}$，若第一个边增加 2mm，而第二个边减少 5mm，问矩形的对角线和面积变化多少？

解 面积 $A=xy$，对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$. 于是，

$$\Delta A\approx y\,dx+x\,dy,\quad \Delta l\approx\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

以 $x=6000$，$y=8000$，$dx=2$，$dy=-5$ 代入上述二式，即得

$$\Delta A\approx 8000\cdot 2+6000(-5)=-14000\text{mm}^2=-140\text{cm}^2,\quad \Delta l\approx\frac{6000\cdot 2+8000(-5)}{\sqrt{6000^2+8000^2}}\approx -2.8\text{mm},$$

即对角线减少约 3mm，面积减少约 140cm^2.

【3247】 扇形的中心角 $\alpha=60^\circ$ 增加 $\Delta\alpha=1^\circ$. 为了使扇形的面积仍然不变，则应当把扇形的半径 $R=20\text{cm}$ 减少若干？

解 扇形的面积 $A=\frac{1}{2}R^2\alpha$. 于是，$\Delta A\approx dA=R\alpha\,dR+\frac{1}{2}R^2\,d\alpha$.

按题设，应有 $\Delta A=0$，即
$$20\,\frac{\pi}{3}dR+\frac{1}{2}\,20^2\,\frac{\pi}{180}\approx 0.$$

解之，得
$$dR\approx -\frac{1}{6}\text{cm}\approx -1.7\text{mm},$$

即应当使半径减少约 1.7mm.

【3248】 证明：乘积的相对误差近似地等于乘数的相对误差之和.

证 设 $u=xy$，则 $du=x\,dy+y\,dx$，从而，$\frac{du}{u}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$.

取绝对值，得
$$\left|\frac{du}{u}\right|\leqslant\left|\frac{dx}{x}\right|+\left|\frac{dy}{y}\right|,$$

上式各项均表示该量的相对误差，本题获证.

【3249】 当测量圆柱的底半径 R 和高 H 时得到以下结果：

$$R=2.5\text{m}\pm 0.1\text{m};\quad H=4.0\text{m}\pm 0.2\text{m},$$

则计算出圆柱的体积会有怎样的绝对误差 Δ 和相对误差 δ？

解 体积 $V=\pi R^2H$. 于是，$\Delta V\approx dV=2\pi RH\,dR+\pi R^2\,dH$.

以 $R=2.5$，$H=4.0$，$dR=0.1$，$dH=0.2$ 代入上式，即得

$$\Delta V\approx 10.2\text{m}^3,\qquad \delta V=\left|\frac{\Delta V}{V}\right|\approx 13\%.$$

【3250】 三角形的边 $a=200\text{m}\pm 2\text{m}$，$b=300\text{m}\pm 5\text{m}$，它们之间的角 $C=60^\circ\pm 1^\circ$，则所计算出三角形的第三边 c 会有怎样的绝对误差？

解 按余弦定律，有 $$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$
微分之，即得 $$c\mathrm{d}c=a\mathrm{d}a+b\mathrm{d}b-b\cos C\mathrm{d}a-a\cos C\mathrm{d}b+ab\sin C\mathrm{d}C.$$
以 $a=200$，$b=300$，$c=\sqrt{200^2+300^2-2\cdot 200\cdot 300\cos 60^\circ}$，$C=\frac{\pi}{3}$，$\mathrm{d}a=2$，$\mathrm{d}b=5$，$\mathrm{d}C=\frac{\pi}{180}$ 代入上式，即得 $$\mathrm{d}c\approx 7.6\mathrm{m}$$
故第三边 c 之绝对误差约为 7.6m.

【3251】 证明：在点(0,0)连续的函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)有两个偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$，但在点(0,0)并非可微的.

说明导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点(0,0)的邻域中的性质.

证明思路 只要证明在点(0,0)，表达式
$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y$$
不能表成 $o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 易知 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 在点(0,0)的任何邻域中无界且有无意义之点.

解 $f'_x(0,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,0)]\Big|_{x=0}=0$, $f'_y(0,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[f(0,y)]\Big|_{y=0}=0.$

考察极限 $$\lim_{\rho\to+0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to+0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
当动点(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于点(0,0)时，显然对不同的 k 有不同的极限值 $\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$. 因此，上述极限不存在，即在点(0,0)，
$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y$$
不能表成 $o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，故知 $\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)不可微分.

不难得到 $$f'_x(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\\ \text{无意义}, & x=0,\ y\neq 0.\end{cases}$$
因此，$f'_x(x,y)$ 在点(0,0)的任何邻域中均有无意义之点及无界，$f'_y(x,y)$ 的性质类似.

【3252】 证明：函数 $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
在点(0,0)的邻域中连续且有有界的偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$，但此函数在点(0,0)不可微.

证明思路 先证函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的邻域中连续. 由不等式
$$|f(x,y)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$$
易知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$. 又 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\neq 0$ 的点显然连续，故 $f(x,y)$ 在点(0,0)的邻域中连续.

其次，证明 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 有界. 为此，只要注意
$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$
又当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有 $$|f'_x(x,y)|\leqslant\frac{|y^3|}{(y^2)^{\frac{3}{2}}}=1,$$
即知 $f'_x(x,y)$ 在点(0,0)的邻域内有界. $f'_y(x,y)$ 的有界性可类似地证明.

最后，证明函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)不可微，仿 3251 题的证法.

证 函数 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\neq 0$ 的点显然是连续的. 由不等式
$$|f(x,y)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

知 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0),$$
故 $f(x,y)$ 在点(0,0)的邻域中连续.

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,由于 $$|f'_x(x,y)|\leqslant\frac{|y^3|}{(y^2)^{\frac{3}{2}}}=1,$$
故 $f'_x(x,y)$ 在点(0,0)的邻域内有界.同法可以证明 $f'_y(x,y)$ 在点(0,0)的邻域内有界.

由于 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$,且极限
$$\lim_{\rho\to+0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf'_x(0,0)-yf'_y(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to+0}\frac{xy}{x^2+y^2}$$
是不存在的,因此可知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)不可微.

【3253】 证明:函数 $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
在点(0,0)的邻域中有偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$,这些偏导数在点(0,0)是不连续的,且在此点的任何邻域中是无界的;然而,此函数在点(0,0)可微.

证明思路 先证 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 存在.事实上,有
$$f'_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
(其中 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$),即 $f'_x(x,y)$ 存在.

类似地,可知 $f'_y(x,y)$ 存在.

其次,证明 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 在点(0,0)不连续,且在此点的任何邻域中无界.只对 $f'_x(x,y)$ 证明.为此,考虑
$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0\right)=\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin 2n\pi-2\sqrt{2n\pi}\cos 2n\pi=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty\quad(n\to\infty).$$
于是,$f'_x(x,y)$ 在点(0,0)的任何邻域内无界,由此又知 $f'_x(x,y)$ 在点(0,0)不连续.至于对 $f'_y(x,y)$ 可仿 $f'_x(x,y)$ 的证法.

最后,证明函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)可微.

证 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,$f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 均存在,且
$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$
$$f'_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$
又因 $$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0,$$
$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{y^2}=0,$$
故知在点(0,0)的邻域内有偏导数 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$.

考虑在点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}},0\right)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$:
$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0\right)=\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin 2\pi-2\sqrt{2n\pi}\cos 2n\pi=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty\quad(n\to\infty),$$
因此,$f'_x(x,y)$ 在点(0,0)的任何邻域内无界,由此又知 $f'_x(x,y)$ 在点(0,0)不连续.同法可证 $f'_y(x,y)$ 在

(0,0)的任何邻域中也无界，从而，$f'_y(x,y)$在点(0,0)也不连续.

最后，我们证明 $f(x,y)$在点(0,0)可微. 事实上 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，且

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf'_x(0,0)-yf'_y(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\ \sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

故得
$$f(x,y)=f(0,0)+xf'_x(0,0)+yf'_y(0,0)+o(\rho),$$

即函数 $f(x,y)$在点(0,0)可微.

【3254】 证明：在某凸形的区域 E 内有有界偏导数 $f'_x(x,y)$和 $f'_y(x,y)$的函数 $f(x,y)$在此区域 E 内一致连续.

证 由于 $f'_x(x,y)$及 $f'_y(x,y)$在 E 内有界，故存在 $L>0$，使当$(x,y)\in E$时，恒有

$$|f'_x(x,y)|\leqslant\frac{L}{2},$$

及
$$|f'_y(x,y)|\leqslant\frac{L}{2}.$$

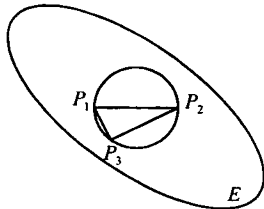


图 6.25

在 E 内任取两点 $P_1(x_1,y_1)$及 $P_2(x_2,y_2)$.

(1)如果以$|P_1P_2|$为直径的圆(包括圆周在内)都属于 E (图 6.25)，则点 $P_3(x_1,x_2)$及线段 P_1P_3、P_2P_3 都在 E 内. 于是，

$$\begin{aligned}&|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\\ \leqslant&|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)|+|f(x_1,y_2)-f(x_2,y_2)|\\ =&|f'_y(x_1,\xi)|\cdot|y_1-y_2|+|f'_x(\eta,y_2)|\cdot|x_1-x_2|,\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 y_1,y_2 之间，η 介于 x_1,x_2 之间. 由偏导数的有界性，即得

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant\frac{L}{2}|y_1-y_2|+\frac{L}{2}|x_1-x_2|$$

$$\leqslant\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=L\ \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1,y_2)^2},$$

或 $|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L|P_2P_2|$.

(2)如图 6.26 所示，$P_1\in E$, $P_2\in E$, 但点(x_1,y_2)和(x_2,y_1)都不一定属于 E. 由于 P_1 和 P_2 均为 E 的内点，故存在 $R>0$，使得分别以 P_1，P_2 为圆心，R 为半径的圆(包括圆周在内)都在 E 内. 作两圆的外公切线 Q_1Q_4 及 Q_2Q_3，则由切点均在 E 内知，矩形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 整个落在 E 内.

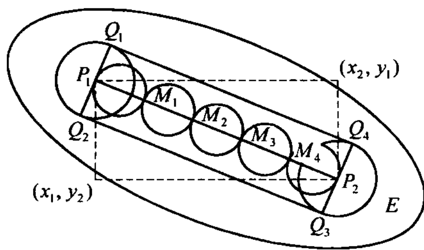


图 6.26

不难看出，在直线段 P_1P_2 上可取足够多的分点：$P_1=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n=P_2$，使

$$|M_{k-1}M_k|<2R\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

则以$|M_{k-1}M_k|$为直径的圆全落在矩形内，从而也在 E 内. 于是，

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(M_k)-f(M_{k-1})|\leqslant\sum_{k=1}^{n}L|M_kM_{k-1}|=L\sum_{k=1}^{n}|M_kM_{k-1}|=L|P_1P_2|.$$

这就证明了对 E 中任意两点，函数 $f(P)$满足利普希茨条件.

对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，则当 $P_1\in E$, $P_2\in E$，且$|P_1P_2|<\delta$时，就恒有

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L|P_1P_2|<L\delta=\varepsilon$$

即函数 $f(x,y)$ 在 E 中一致连续.

注 用∂E表区域E的边界,$\bar{E}$表E加上∂E所成的闭区域. 在本题的假定下,还可证明 $f(x,y)$ 可开拓为$\bar{E}$上的一致连续函数. 事实上,对∂E上任一点P_0,由柯西收敛准则知,当点P从E内趋于P_0时,$f(P)$的极限A存在(根据$f(P)$在E有一致连续性易知它满足柯西收敛准则). 我们规定$f(P_0)=A$. 于是,$f(P)$在整个$\bar{E}$上有定义. 在不等式

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L|P_1P_2|\quad (P_1,P_2\in E)$$

两端让 $P_1\to P_0(P_0\in\partial E)$取极限,得

$$|f(P_0)-f(P_2)|\leqslant L|P_0P_2|\quad (P_0\in\partial E,\ P_2\in E),$$

再让 $P_2\to P_0'(P_0'\in\partial E)$取极限,得

$$|f(P_0)-f(P_0')|\leqslant L|P_0P'_0|\quad (P_0\in\partial E,\ P_0'\in\partial E).$$

由此可知,$f(P)$在$\bar{E}$上满足利普希茨条件,从而,$f(P)$在$\bar{E}$上一致连续.

【3255】 证明:若函数 $f(x,y)$ 对变量 x 是连续的(对每一个固定的值 y)且有对变量 y 的有界的导数 $f'_y(x,y)$,则此函数对变量 x 和 y 的总体是连续的.

提示 利用 3206 题的结果.

证 设 $P_0(x_0,y_0)$是所论的开域 E 中任一点. 取以 P_0 为中心的一个充分小的开球 G_0,使 G_0 完全含于 E 内. 设在 G_0 内,有$|f'_y(x,y)|\leqslant L$. 于是,当(x,y'),(x,y'')属于 G_0 时,有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|=|f'_y(x,\xi)|\cdot|y'-y''|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中ξ为介于y',y''之间的一个数,故 $f(x,y)$ 在 G_0 中满足利普希茨条件. 因此,根据 3206 题的结果知 $f(x,y)$在 G_0 中连续,特别是在 P_0 点连续. 由 P_0 点的任意性,即知 $f(x,y)$ 在 E 内连续,证毕.

注 从证明过程中很明显,本题只要假定 $f'_y(x,y)$ 在 E 中每一点的某邻域中有界即可.

在下列问题中求所列偏导数:

【3256】 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$, 若

$$u=x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y-y^3+x^4-4x^2y^2+y^4.$$

解 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2+6x-6y+12x^2-8y^2$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6+24x$.

于是, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=-16$.

【3257】 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$,若 $u=x\ln(xy)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\ln(xy)+1$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x}$.

于是,$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=0$.

【3258】 $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}$, 若 $u=x^3\sin y+y^3\sin x$.

解 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6\sin y+y^3\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=6\sin y-y^3\cos x$.

于是,$\dfrac{\partial^6}{\partial x^3\partial y^3}=6\sin\left(y+\dfrac{3\pi}{2}\right)-6\cos x=-6(\cos y+\cos x)$.

【3259】 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, 若 $u=\arctan\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

提示 注意 $u=\arctan x+\arctan y+\arctan z+\varepsilon\pi$ ($\varepsilon=0$,或±1).

解 注意到 $u=\arctan x+\arctan y+\arctan z+\varepsilon\pi$ ($\varepsilon=0,\pm1$),

即得 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0$.

【3260】 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$，若 $u=e^{xyz}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz}$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=ze^{xyz}+xyz^2e^{xyz}$.

于是， $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=e^{xyz}+xyze^{xyz}+2xyze^{xyz}+x^2y^2z^2e^{xyz}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$.

【3261】 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}$，若 $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2(y-\eta)^2}}$.

解 设 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$，则 $u=-\ln r$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x-\xi}{r^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{r^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial\xi}=-\frac{2(y-\eta)}{r^4}+\frac{8(x-\xi)^2(y-\eta)}{r^6}.$$

于是， $$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}=\frac{2}{r^4}-\frac{8(y-\eta)^2}{r^6}-\frac{8(x-\xi)^2}{r^6}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}=-\frac{6}{r^4}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$$

【3262】 $\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$，若 $u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$.

解 $\dfrac{\partial^p u}{\partial x^q}=p!(y-y_0)^q$. 于是， $\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}=p!q!$ （p,q 均为正整数）.

【3263】 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$，若 $u=\dfrac{x+y}{x-y}$.

提示 注意 $u=1+\dfrac{2y}{x-y}$，$\dfrac{\partial^m u}{\partial x^m}=(-1)^m m!\ \dfrac{2y}{(x-y)^{m+1}}$，并利用求高阶导数的莱布尼茨公式.

解 $u=1+\dfrac{2y}{x-y}$，$\dfrac{\partial^m u}{\partial x^m}=(-1)^m m!\dfrac{2y}{(x-y)^{m+1}}$. 利用求高阶导数的莱布尼茨公式，即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}&=(-1)^m\cdot 2(m!)\left\{y\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right]+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y)\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right]\right\}\\&=2(-1)^m m!\left\{\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)y}{(x-y)^{m+n+1}}+\frac{n(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{(x-y)^{m+n}}\right\}\\&=\frac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x+y)^{m+n-1}}.\end{aligned}$$

【3264】 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$，若 $u=(x^2+y^2)e^{x+y}$.

提示 注意 $u=u_1+u_2$，其中 $u_1=x^2e^xe^y$，$u_2=y^2e^ye^x$，仿 3263 题的解法.

解 $u=(x^2+y^2)e^{x+y}=x^2e^xe^y+y^2e^ye^x=u_1+u_2$. 显见 $\dfrac{\partial^m u_2}{\partial x^m}=e^xy^2e^y$，利用求高阶导数的莱布尼茨公式，即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}&=\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}\right)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^xy^2e^y)=e^x\frac{\partial^n}{\partial y^n}(y^2)e^y\\&=e^x\left\{y^2\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^y)+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(e^y)+C_n^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2)\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}(e^y)\right\}\\&=e^{x+y}\{y^2+2ny+n(n-1)\}.\end{aligned}$$

同法可求得 $$\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}=e^{x+y}\{x^2+2mx+m(m-1)\}.$$

于是， $$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}+\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}=e^{x+y}[x^2+y^2+2mx+2ny+m(m-1)+n(n-1)].$$

【3265】+ $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$，若 $u=xyze^{x+y+z}$.

解 $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\dfrac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}(xe^xye^yze^z)=\dfrac{\partial^p}{\partial x^p}(xe^x)\cdot\dfrac{\partial^q}{\partial y^q}(ye^y)\cdot\dfrac{\partial^r}{\partial z^r}(ze^z)$

$=e^x(x+p)\cdot e^y(y+q)\cdot e^z(z+r)=e^{x+y+z}(x+p)(y+q)(z+r)$

【3266】 若 $f(x,y)=e^x\sin y$，求 $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0,0)$.

解 $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0,0)=e^x\sin\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\sin\frac{n\pi}{2}$.

【3267】 证明：若 $u=f(xyz)$，则 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=F(t)$，式中 $t=xyz$，并求函数 F.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=yzf'(t)$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=yzf''(t)xz+zf'(t)$.

于是，

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(t)+2xyzf''(t)+f'(t)+xyzf''(t)=x^2y^2z^2f'''(t)+3xyzf''(t)+f'(t)$$

$$=t^2f'''(t)+3tf''(t)+f'(t)=F(t).$$

【3268】 设 $u=x^4-2x^3y-2xy^3+y^4+x^3-3x^2y-3xy^2+y^3+2x^2-xy+2y^2+x+y+1$，求 d^4u. 导数 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}$ 和 $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ 等于什么？

解 $d^4u=24dx^4-2C_4^1d^3(x^3)dy-2C_4^1dxd^3(y^3)+24dy^4=24(dx^4-2dx^3dy-2dxdy^3+dy^4)$.

由 $d^4u=(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y})^4u$，得 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=-12$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}=-12$，$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=24$.

在下列各题中求所指出的阶的全微分：

【3269】 d^3u，若 $u=x^3+y^3-3xy(x-y)$.

解 $d^3u=6(dx^3+dy^3-3dx^2dy+3dxdy^2)$.

【3270】 d^3u，若 $u=\sin(x^2+y^2)$.

解 $du=2x\cos(x^2+y^2)dx+2y\cos(x^2+y^2)dy=2(x\,dx+y\,dy)\cos(x^2+y^2)$

$d^2u=-4\sin(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)^2+2\cos(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)$.

于是，

$$d^3u=-8\cos(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)^3-8\sin(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)(dx^2+dy^2)$$
$$-4\sin(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)(dx^2+dy^2)$$
$$=-8(x\,dx+y\,dy)^3\cos(x^2+y^2)-12(x\,dx+y\,dy)(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2).$$

【3271】 $d^{10}u$，若 $u=\ln(x+y)$.

解 $du=\frac{dx+dy}{x+y}$. 于是， $d^{10}u=-\frac{9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$.

【3272】 d^6u，若 $u=\cos x\operatorname{ch}y$.

解 $$d^6u=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^6u=-\cos x\operatorname{ch}y\,dx^6-6\sin x\operatorname{sh}y\,dx^5dy+15\cos x\operatorname{ch}y\,dx^4dy^2$$
$$+20\sin x\operatorname{sh}y\,dx^3dy^3-15\cos x\operatorname{ch}y\,dx^2dy^4-6\sin x\operatorname{sh}y\,dx\,dy^5+\cos x\operatorname{ch}y\,dy^6$$
$$=-(dx^6-15dx^4dy^2+15dx^2dy^4-dy^6)\cos x\operatorname{ch}y-2dx\,dy(3dx^4-10dx^2dy^2+3dy^4)\sin x\operatorname{sh}y.$$

【3273】 d^3u，若 $u=xyz$.

提示 注意 $d^2x=d^2y=d^2z=0$.

解 注意到 $d^2x=d^2y=d^2z=0$，即得

$$d^3u=d^3(xyz)=C_3^1dxd^2(yz)=3dx(C_2^1dydz)=6dxdydz.$$

【3274】 d^4u，若 $u=\ln(x^xy^yz^z)$.

解 由于 $u=x\ln x+y\ln y+z\ln z$，故

$$d^4u=(x\ln x)^{(4)}dx^4+(y\ln y)^{(4)}dy^4+(z\ln z)^{(4)}dz^4=2\left(\frac{dx^4}{x^3}+\frac{dy^4}{y^3}+\frac{dz^4}{z^3}\right).$$

【3275】 d^nu，若 $u=e^{ax+by}$.

提示 注意 $d^2(ax+by)=0$.

解 注意到 $d^2(ax+by)=0$,即得

$$d^n u=d^n(e^{ax+by})=e^{ax+by}[d(ax+by)]^n=e^{ax+by}(a\,dx+b\,dy)^n.$$

【3276】 $d^n u$，若 $u=X(x)Y(y)$.

提示 注意 $d^n u=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d^{n-k}X(x)d^kY(y)$.

解 $d^n u=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d^{n-k}X(x)d^kY(y)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k X^{(n-k)}(x)Y^{(k)}(y)dx^{n-k}dy^k$,

【3277】 $d^n u$，若 $u=f(x+y+z)$.

提示 注意 $d^2(x+y+z)=0$.

解 注意到 $d^2(x+y+z)=0$,即得

$$d^n u=f^{(n)}(x+y+z)(dx+dy+dz)^n.$$

【3278】 $d^n u$，若 $u=e^{ax+by+cz}$.

提示 注意 $d^2(ax+by+cz)=0$.

解 注意到 $d^2(ax+by+cz)=0$,即得

$$d^n u=e^{ax+by+cz}(adx+bdy+cdz)^n.$$

【3279】 $P_n(x,y,z)$为 n 次齐次多项式.证明：

$$d^nP_n(x,y,z)=n!P_n(dx,dy,dz).$$

证明思路 注意到 $P_n(x,y,z)$可表示为形如 $Ax^py^qz^r$ 的单项式之和,其中 A 为常数,p、q、r 为非负整数,且 $p+q+r=n$.

由于微分运算对加法及乘以常数是线性的(可交换的),故只要证明 $d^n(x^py^qz^r)=n!dx^pdy^qdz^r$，命题即获证.

证 $P_n(x,y,z)$可表示为形如 $Ax^py^qz^r$ 的单项式之和,其中 A 为常数,p、q、r 为非负整数,且 $p+q+r=n$.

由于微分运算对加法及乘以常数是线性的(可交换的),因此要证 $d^nP_n(x,y,z)=n!P_n(dx,dy,dz)$,只要证明 $d^n(x^py^qz^r)=n!dx^pdy^qdz^r$ 即可.事实上,

$$d^n(x^py^qz^r)=C_n^{p+q}d^{p+q}(x^py^q)d^r(z^r)=\frac{n!}{r!(p+q)!}[C_{p+q}^p d^p(x^p)d^q(y^q)d^r(z^r)]$$

$$=\frac{n!}{r!(p+q)!}\cdot\frac{(p+q)!}{p!q!}\,p!q!r!dx^pdy^qdz^r=n!dx^pdy^qdz^r.$$

【3280】 设 $Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.求 Au 和 $A^2u=A(Au)$,若

(1) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$； (2) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

于是， $Au=\frac{x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}=-u$， $A^2u=A(Au)=A(-u)=-Au=u$.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$.

于是， $Au=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=1$， $A^2u=A(Au)=0$.

【3281】 设 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.求 Δu,若

(1) $u=\sin x\operatorname{ch}y$； (2) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sin x\operatorname{ch}y$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x\operatorname{ch}y$.

于是， $\Delta u=-\sin\operatorname{ch}y+\sin x\operatorname{ch}y=0$.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$， $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，由对称性知，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

于是， $\Delta u=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}=0$.

【3282】 设 $\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$， $\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$，若

(1) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$； (2) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 (1) $\Delta_1 u=9[(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2]$， $\Delta_2 u=6(x+y+z)$.

(2) 令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $u=\frac{1}{r}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

由对称性即知

$$\Delta_1 u=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^6}=\frac{1}{r^4}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\Delta_2 u=\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}\right)=0.$$

求下列复合函数的一阶和二阶导数：

【3283】 $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

提示 先求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，再利用对称性，即得 $\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$， $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2f''(x^2+y^2+z^2)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xyf''(x^2+y^2+z^2).$$

由对称性即知

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2), \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4y^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4z^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=4yzf''(x^2+y^2+z^2), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=4xzf''(x^2+y^2+z^2).$$

【3284】 $u=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)^{*)}.$$

*) f'_1，f'_2，f''_{11}，f''_{22} 均系按其下标的次序分别对第一、第二个中间变量求导数，以下各题均同，不再说明.

【3285】 $u=f(x,xy,xyz)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1(x,xy,xyz)+yf'_2(x,xy,xyz)+yzf'_3(x,xy,xyz)$.

将 $f'_1(x,xy,xyz)$，$f'_2(x,xy,xyz)$，$f'_3(x,xy,xyz)$，简记为 f'_1,f'_2,f'_3，以后不再说明. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+yf''_{12}+yzf''_{13}+y(f''_{21}+yf''_{22}+yzf''_{23})+yz(f''_{31}+yf''_{32}+yzf''_{33}).$$

由于 $f''_{12}=f''_{21}$，$f''_{13}=f''_{31}$，$f''_{23}=f''_{32}$（以下各题均同），故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+x^2zf''_{23}+x^2zf''_{32}+x^2z^2f''_{33}=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xf''_{12}+xzf''_{13}+f'_2+xyf''_{22}+xyzf''_{23}+zf'_3+xyzf''_{32}+xyz^2f''_{33}$$
$$=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3.$$

【3286】 设 $u=f(x+y,xy)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2$.

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{11}+xf''_{12}+yf''_{21}+xyf''_{22}+f'_2=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2$.

【3287】 设 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$，求 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+2xf'_2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+2xf''_{12}+2f'_2+2xf''_{21}+4x^2f''_{22}=f''_{11}+4xf''_{12}+4x^2f''_{22}+2f'_2.$$

由对称性即得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''_{11}+4yf''_{12}+4y^2f''_{22}+2f'_2$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''_{11}+4zf''_{12}+4z^2f''_{22}+2f'_2$.

于是，$\Delta u=3f''_{11}+4(x+y+z)f''_{12}+4(x^2+y^2+z^2)f''_{22}+6f'_2$.

求下列复合函数的一阶和二阶全微分（x,y 及 z 为自变量）：

【3288】 $u=f(t)$，其中 $t=x+y$.

解 $\mathrm{d}u=f'(t)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$，$\mathrm{d}^2u=f''(t)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2$.

【3289】 $u=f(t)$，其中 $t=\frac{y}{x}$.

解 $\mathrm{d}u=f'(t)\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}$，$\mathrm{d}^2u=f''(t)\frac{(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)^2}{x^4}-2f'(t)\frac{\mathrm{d}x(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)}{x^3}$.

【3290】 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 $\mathrm{d}u=f'\frac{x\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\mathrm{d}^2u=f''\frac{(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)^2}{x^2+y^2}+f'\frac{(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

【3291】 $u=f(t)$，其中 $t=xyz$.

解 $\mathrm{d}u=f'(t)(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)$,

$$\mathrm{d}^2u=f''(t)(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)^2+2f'(t)(z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z).$$

【3292】 $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

解 $du=2f'\cdot(xdx+ydy+zdz)$,

$d^2u=4f''\cdot(xdx+ydy+zdz)^2+2f'\cdot(dx^2+dy^2+dz^2)$.

【3293】 $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=ax$, $\eta=by$.

解 $du=af'_1dx+bf'_2dy$, $\quad d^2u=a^2f''_{11}dx^2+2abf''_{12}dxdy+b^2f''_{22}dy^2$.

【3294】 $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

解 $du=f'_1\cdot(dx+dy)+f'_2\cdot(dx-dy)$,

$d^2u=f''_{11}\cdot(dx+dy)^2+2f''_{12}\cdot(dx^2-dy^2)+f''_{22}\cdot(dx-dy)^2$.

【3295】 $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=xy$, $\eta=\frac{x}{y}$.

解 $du=f'_1\cdot(ydx+xdy)+f'_2\frac{ydx-xdy}{y^2}$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot(ydx+xdy)^2+f''_{22}\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+2f''_{12}\frac{y^2dx^2-x^2dy^2}{y^2}+2f'_1dxdy-2f'_2\frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}.$$

【3296】 $u=f(x+y,z)$.

解 $du=f'_1\cdot(dx+dy)+f'_2dz$,

$d^2u=f''_{11}\cdot(dx+dy)^2+2f''_{12}\cdot(dx+dy)dz+f''_{22}dz^2$.

【3297】 $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$.

解 $du=f'_1\cdot(dx+dy+dz)+2f''_2\cdot(xdx+ydy+zdz)$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot(dx+dy+dz)^2+4f''_{12}\cdot(dx+dy+dz)(xdx+ydy+zdz)$$
$$+4f''_{22}\cdot(xdx+ydy+zdz)^2+2f'_2\cdot(dx^2+dy^2+dz^2).$$

【3298】 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$.

解 $du=f'_1\frac{ydx-xdy}{y^2}+f'_2\frac{zdy-ydz}{z^2}$,

$$d^2u=f''_{11}\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+f''_{22}\frac{(zdy-ydz)^2}{z^4}+2f''_{12}\frac{(ydx-xdy)(zdy-ydz)}{y^2z^2}-2f'_1\frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}$$
$$-2f'_2\frac{(zdy-ydz)dz}{z^3}.$$

【3299】 $u=f(x,y,z)$，其中 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

解 $du=(f'_1+2tf'_2+3t^3f'_3)dt$,

$d^2u=(f''_{11}+4t^2f''_{22}+9t^4f''_{33}+4tf''_{12}+6t^2f''_{13}+12^3f''_{23}+2f'_2+6tf'_3)dt^2$.

【3300】 $u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中 $\xi=ax$, $\eta=by$, $\zeta=cz$.

解 $du=af'_1dx+bf'_2dy+cf'_3\,dz$,

$d^2u=a^2f''_{11}dx^2+b^2f''_{22}dy^2+c^2f''_{33}dz^2+2abf''_{12}dxdy+2acf''_{13}dxdz+2bcf''_{23}dydz$.

【3301】 $u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中 $\xi=x^2+y^2$, $\eta=x^2-y^2$, $\zeta=2xy$.

解 $du=2f'_1\cdot(xdx+ydy)+2f'_2\cdot(xdx-ydy)+2f'_3\cdot(ydx+xdy)$,

$$d^2u=4f''_{11}\cdot(xdx+ydy)^2+4f''_{22}\cdot(xdx-ydy)^2+4f''_{33}\cdot(ydx+xdy)^2$$
$$+8f''_{12}\cdot(x^2dx^2-y^2dy^2)+8f''_{13}\cdot(xdx+ydy)(ydx+xdy)$$
$$+8f''_{23}\cdot(xdx-ydy)(ydx+xdy)+2f'_1\cdot(dx^2+dy^2)+2f'_2\cdot(dx^2-dy^2)+4f'_3dxdy.$$

求 d^nu，设：

【3302】 $u=f(ax+by+cz)$.

解 $d^nu=f^{(n)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^n$.

【3303】 $u=f(ax,by,cz)$.

解 $\mathrm{d}^n u=\left(a\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial\xi}+b\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial\eta}+c\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\eta,\zeta)$，其中

$$\xi=ax,\quad \eta=by,\quad \zeta=cz.$$

【3304】 $u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中

$$\xi=a_1x+b_1y+c_1z,\qquad \eta=a_2x+b_2y+c_2z,\qquad \zeta=a_3x+b_3y+c_3z.$$

解
$$\mathrm{d}^n u=\left[(a_1\mathrm{d}x+b_1\mathrm{d}y+c_1\mathrm{d}z)\frac{\partial}{\partial\xi}+(a_2\mathrm{d}x+b_2\mathrm{d}y+c_2\mathrm{d}z)\frac{\partial}{\partial\eta}+(a_3\mathrm{d}x+b_3\mathrm{d}y+c_3\mathrm{d}z)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]^n f(\xi,\eta,\zeta)$$
$$=\left[\mathrm{d}x\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi}+a_2\frac{\partial}{\partial\eta}+a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+\mathrm{d}y\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial}{\partial\eta}+b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+\mathrm{d}z\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial}{\partial\eta}+c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\eta,\zeta).$$

【3305】 设 $u=f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和 f 为二阶可微的函数. 证明：

$$\Delta u=F(r),$$

其中 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\Delta$ 为拉普拉斯算子，并求函数 F.

提示 注意 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3}$，利用对称性，即可证

$$\Delta u=f''(r)+2f'(r)\frac{1}{r}=F(r).$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r}$，$\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3}$.

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

于是，
$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)+2f'(r)\frac{1}{r}=F(r).$$

【3306】 设 u 和 v 为二阶可微的函数，Δ 为拉普拉斯算子(参阅 3305 题). 证明：

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

其中 $\Delta(uv)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$.

提示 由拉普拉斯算子的定义易证本命题.

证
$$\Delta(uv)=\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}$$
$$=\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

这就是所要证明的.

【3307】 证明：函数 $\qquad u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

(a 和 b 为常数)满足拉普拉斯方程 $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

证 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$，$\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$.

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}.$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

【3308】 证明：若函数 $u=u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程(参阅 3307 题)，则函数

$$v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

也满足这方程.

提示 令 $\xi=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\eta=\frac{y}{x^2+y}$，则 $v(x,y)=u(\xi,\eta)$，利用 $u''_{\xi\xi}(\xi,\eta)+u''_{\eta\eta}(\xi,\eta)=0$，可得 $\Delta v=0$，命题获证.

证 设 $\xi=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\eta=\frac{y}{x^2+y^2}$，则 $v(x,y)=u(\xi,\eta)$.

从而，
$$v''_{xx}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_x)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_x)^2+2u''_{\xi\eta}\xi'_x\eta'_x+u'_\xi\xi''_{xx}+u'_\eta\eta''_{xx},$$
$$v''_{yy}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_y)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_y)^2+2u''_{\xi\eta}\xi'_y\eta'_y+u'_\xi\xi''_{yy}+u'_\eta\eta''_{yy},$$

由于
$$\xi'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=-\eta'_y,\quad \xi'_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\eta'_x,$$
$$\xi''_{yy}=(\xi'_y)'_y=(\eta'_x)'_y=(\eta'_y)'_x=-\xi''_{xx},$$
$$\eta''_{yy}=(\eta'_y)'_y=(-\xi'_x)'_y=-(\xi'_y)'_x=-\eta''_{xx}$$

及
$$u''_{\xi\xi}(\xi,\eta)+u''_{\eta\eta}(\xi,\eta)=0,$$

故
$$\begin{aligned}\Delta v&=v''_{xx}+v''_{yy}\\&=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_x)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_x)^2+2u''_{\xi\eta}\xi'_x\eta'_x+u'_\xi\xi''_{xx}+u'_\eta\eta''_{xx}+u''_{\xi\xi}\cdot(\eta'_x)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(-\xi'_x)^2\\&\quad+2u''_{\xi\eta}\eta'_x\cdot(-\xi'_x)^2+u'_\xi\cdot(-\xi''_{xx})+u'_\eta\cdot(-\eta''_{xx})\\&=(u''_{\xi\xi}+u''_{\eta\eta})[(\xi'_x)^2+(\eta'_x)^2]=0,\end{aligned}$$

即函数 v 也满足拉普拉斯方程.

【3309】 证明：函数
$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$

(a 和 b 为常数)满足热传导方程
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}[(x-b)^2-2a^2t],$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x-b}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}[(x-b)^2-2a^2t].$$

将 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 比较可得 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，即函数 u 满足热传导方程.

【3310】 证明：若函数 $u=u(x,t)$ 满足热传导方程(参阅 3309 题)，则函数
$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t},-\frac{1}{a^4t}\right)\quad(t>0)$$

也满足该方程.

证 设 $w=w(x,t)=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$，此函数即 3309 题中的函数 u 乘以 $2\sqrt{\pi}$，并令 $b=0$ 后得到. 因此，它满足热传导方程
$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

显然有
$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{2x}{4a^2t}w=-\frac{xw}{2a^2t}.$$

令 $\xi=\xi(x,t)=\frac{x}{a^2t}$，$\eta=\eta(t)=-\frac{1}{a^4t}$，则
$$\xi'_x=\frac{1}{a^2t},\ \xi''_{xx}=0,\ \xi'_t=-\frac{x^2}{a^2t^2},\ \eta'_t=\frac{1}{a^4t^2}.$$

由于 $v=w(x,t)u(\xi,\eta)$ 及 $u'_\eta=a^2u''_{\xi\xi}$，故
$$v'_t=w'_tu+w\cdot(u'_\xi\xi'_t+u'_\eta\eta'_t)=a^2w''_{xx}u+w\cdot\left[u'_\xi\cdot\left(-\frac{x^2}{a^2t^2}\right)+a^2u''_{\xi\xi}\cdot\left(\frac{1}{a^4t^2}\right)\right],$$

$$v'_x = w'_x u + w u'_\xi \xi'_x,$$

$$v''_{xx} = w''_{xx} u + 2w'_x u'_\xi \xi'_x + w u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + w u'_\xi \xi''_{xx} = w''_{xx} u + 2\left(-\frac{xw}{2a^2 t}\right) u'_\xi \left(\frac{x}{a^2 t}\right) + w u''_{\xi\xi} \left(\frac{1}{a^2 t}\right)^2$$

$$= w''_{xx} u - \frac{x^2 w}{a^4 t^2} u'_\xi + \frac{w}{a^4 t^2} u''_{\xi\xi}.$$

将 v'_t 与 v''_{xx} 比较可得 $v'_t = a^2 v''_{xx}$，即函数 v 也满足热传导方程.

【3311】 证明：函数
$$u = \frac{1}{r}$$
（式中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$）当 $r \neq 0$ 时，满足拉普拉斯方程
$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

提示 本题证法与 3282 题(2)的证法完全类似，只要将该题中的 x, y, z 相应地换成 $x-a,\ y-b,\ z-b$ 即可.

证 本题证法与 3282 题(2)的证法完全类似，只要将该题中的 x, y, z 换成 $x-a,\ y-b,\ z-b$ 即可. 事实上，
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5}.$$
将上述三式相加，即证得
$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

【3312】 证明：若函数 $u = u(x, y, z)$ 满足拉普拉斯方程（参阅 3311 题），则函数
$$v = \frac{1}{r} u\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right)$$
（式中 k 为常数及 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$）也满足该方程.

证 证法 1：

设 $S = S(x, y, z) = \dfrac{1}{r}$，则由 3282 题(2)知
$$\Delta S = S''_{xx} + S''_{yy} + S''_{zz} = 0, \qquad (S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2 = \frac{1}{r^4} = S^4.$$
$$S'_x = -\frac{x}{r^3} = -S^3 x,\quad S'_y = -S^3 y,\quad S'_z = -S^3 z.$$

记 $v = \dfrac{1}{r} u\left(\dfrac{k^2 x}{r^2}, \dfrac{k^2 y}{r^2}, \dfrac{k^2 z}{r^2}\right) = S u(k^2 S^2 x, k^2 S^2 y, k^2 S^2 z) = S w(x, y, z, S) = F(x, y, z, S)$.

于是，
$$v'_x = F'_x + F'_s S'_x.$$
注意到 F'_x 和 F'_s 也是自变量 x, y, z 和中间变量 S 的函数，即得
$$v''_{xx} = F''_{xx} + 2F''_{xs} S'_x + F''_{ss} \cdot (S'_x)^2 + F'_s S''_{xx}.$$
由对称性得
$$v''_{yy} = F''_{yy} + 2F''_{ys} S'_y + F''_{ss} \cdot (S'_y)^2 + F'_s S''_{yy},$$
$$v''_{zz} = F''_{zz} + 2F''_{zs} S'_z + F''_{ss} \cdot (S'_z)^2 + F'_s S''_{zz}.$$
于是，
$$\Delta v = (F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz}) + F'_s \cdot (S''_{xx} + S''_{yy} + S''_{zz}) + \{2(F''_{xs} S'_x + F''_{ys} S'_y + F''_{ys} S'_z)$$
$$+ F''_{ss} \cdot [(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2]\}.$$
显然第二个括弧为零，也不难验证第一个括弧为零. 事实上，
$$F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz} = k^4 S^5 \cdot (u''_{11} + u''_{22} + u''_{33}) = 0.$$

现在来计算最后一个括弧. 注意到
$$S w'_s = 2k^2 S^2 x u'_1 + 2k^2 S^2 y u'_2 + 2k^2 S^2 z u'_3 = 2x w'_x + 2y w'_y + 2z w'_z,$$
即得
$$F''_{ss} \cdot [(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2] = (Sw)''_{ss} S^4 = (w + S w'_s)'_s S^4 = (w + 2x w'_x + 2y w'_y + 2z w'_z)'_s S^4$$
$$= S^4 w'_s + 2x S^4 w''_{xs} + 2y S^4 w''_{ys} + 2z S^4 w''_{zs}. \tag{1}$$

而

$$2(F''_{xs}S'_x+F''_{ys}S'_y+F''_{zs}S'_z)=2(Sw)''_{xs}(-S^3x)+2(Sw)''_{ys}(-S^3y)+2(Sw)''_{zs}(-S^3z)$$

$$=-2S^3x\cdot(Sw'_x)'_s-2S^3y\cdot(Sw'_y)'_s-2S^3z\cdot(Sw'_z)'_s$$

$$=-2S^3x\cdot(w'_x+Sw''_{xs})-2S^3y\cdot(w'_y+Sw''_{ys})-2S^3z\cdot(w'_z+Sw''_{zs})=-S^3\cdot(2xw'_x+2yw'_y+2zw'_z)$$

$$-2xS^4w''_{xs}-2yS^4w''_{ys}-2zS^4w''_{zs}$$

$$=-S^4w'_s-2xS^4w''_{xs}-2yS^4w''_{ys}-2zS^4w''_{zs}. \quad (2)$$

比较(1)式和(2)式即知第三个括弧也为零. 于是，最后证得 $\Delta v=0$.

证法 2：

本题也可直接求出$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，进而证得 $\Delta v=0$. 事实上，设

$$\frac{k^2x}{r^2}=t_1,\quad \frac{k^2y}{r^2}=t_2,\quad \frac{k^2z}{r^2}=t_3,$$

利用 3306 题的结果即得

$$\Delta v=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2(t_1,t_2,t_3)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(t_1,t_2,t_3)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(t_1,t_2,t_3)}{\partial z^2}\right]+u(t_1,t_2,t_3)\Delta\left(\frac{1}{r}\right)+2\left[\frac{\partial u(t_1,t_2,t_3)}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u(t_1,t_2,t_3)}{\partial y}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}+\frac{\partial u(t_1,t_2,t_3)}{\partial z}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\right]. \quad (1)$$

为书写简便起见，记 $u(t_1,t_2,t_3)=u$. 分别求 u 及$\frac{1}{r}$对 x、y、z 的一阶偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=k^2\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_2}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_3}\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=k^2\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_2}\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_3}\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=k^2\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_2}\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_3}\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right];$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^3}=-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}.$$

从而得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$=k^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_3}\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right]\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\left[\frac{-2xr^4-4xr^2(r^2-2x^2)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+k^2\frac{\partial u}{\partial t_2}\left[\frac{-2yr^4-4xr^2(-2xy)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}\left(\frac{-2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+k^2\frac{\partial u}{\partial t_3}\left[\frac{-2zr^4-4xr^2(-2xz)}{r^8}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=k^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_3}\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\left[\frac{-2xr^4-4yr^2(-2xy)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right]\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)+k^2\frac{\partial u}{\partial t_2}\left[\frac{-2yr^4-4yr^2(r^2-2y^2)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)+k^2\frac{\partial u}{\partial t_3}\left[\frac{-2zr^4-4yr^2(-2yz)}{r^8}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=k^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_3}\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\left[\frac{-2xr^4-4zr^2(-2xz)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)+k^2\frac{\partial u}{\partial t_2}\left[\frac{-2yr^4-4zr^2(-2yz)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right]\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)+k^2\frac{\partial u}{\partial t_3}\left[\frac{-2zr^4-4zr^2(r^2-2z^2)}{r^8}\right].$$

将$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}$, $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}$, $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$代入(1)式，合并整理，并注意到

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0 \quad 及 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}=0,$$

即得

$$\Delta v=\frac{1}{r}\left[\frac{k^4}{r^4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\right)-\frac{2k^2}{r^4}\left(x\frac{\partial u}{\partial t_1}+y\frac{\partial u}{\partial t_2}+z\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)+0\cdot\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial t_i\partial t_j}\right]+u\cdot 0$$

$$+\frac{2k^2}{r^5}\left(x\frac{\partial u}{\partial t_1}+y\frac{\partial u}{\partial t_2}+z\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)=0,$$

上式说明函数 $v=v(x,y,z)$也满足拉普拉斯方程.

【3313】 证明：函数

$$u=\frac{C_1 e^{-ar}+C_2 e^{ar}}{r}$$

(式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，C_1，C_2 为常数)满足亥姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2 u.$$

证 设 $v=\frac{1}{r}e^{-ar}$，$w=\frac{1}{r}e^{ar}$则有

$$u=C_1 v+C_2 w.$$

$$v'_x=v'_r r'_x=e^{-ar}\left(-\frac{1}{r^2}-\frac{a}{r}\right)\frac{x}{r}=-xv\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right),$$

$$v''_{xx}=-v'_x\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)x-v\cdot\left(-\frac{2}{r^3}-\frac{a}{r^2}\right)\frac{x}{r}x-v\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)$$

$$=x^2 v\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)^2+x^2 v\frac{1}{r}\left(\frac{2}{r^3}+\frac{a}{r^2}\right)-v\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)$$

$$=v\cdot\left[\left(\frac{3}{r^4}+\frac{3a}{r^3}+\frac{a^2}{r^2}\right)x^2-\frac{1}{r^2}-\frac{a}{r}\right].$$

利用对称性，即得 $\quad \Delta v=v\cdot\left[\left(\frac{3}{r^4}+\frac{3a}{r^3}+\frac{a^2}{r^2}\right)(x^2+y^2+z^2)-\frac{3}{r^2}-\frac{3a}{r}\right]=a^2 v.$

记 $b=-a$，则 $w=\frac{1}{r}e^{-br}$. 仿上述证明，有

$$\Delta w=b^2 w=a^2 w.$$

于是，

$$\Delta u=\Delta(C_1 v+C_2 w)=C_1\Delta v+C_2\Delta w=C_1 a^2 v+C_2 a^2 w=a^2 u,$$

即 $\Delta u=a^2 u$.

【3314】 设函数 $u_1=u_1(x,y,z)$及 $u_2=u_2(x,y,z)$满足拉普拉斯方程 $\Delta u=0$. 证明：函数

$$v=u_1(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)u_2(x,y,z)$$

满足双调和方程 $\Delta(\Delta v)=0$.

证明思路 对函数 v 应用 3306 题的结果，并注意题设条件可得 Δv，再重复应用同一结果于 Δv，即可知函数 v 满足双调和方程 $\Delta(\Delta v)=0$.

证 利用 3306 题的结果,即得

$$\Delta v=\Delta u_1+(x^2+y^2+z^2)\Delta u_2+u_2\Delta(x^2+y^2+z^2)+2\left(2x\frac{\partial u_2}{\partial x}+2y\frac{\partial u_2}{\partial y}+2z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)$$

$$=6u_2+4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x}+y\frac{\partial u_2}{\partial y}+z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right).$$

重复应用同一结果于 Δv,得

$$\Delta(\Delta v)=6\Delta u_2+4\left\{x\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+y\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+z\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u_2}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u_2}{\partial z}\Delta z+2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\right\}.$$

由于 $\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2)=0,$

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=0,\quad \Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)=0,$$

故最后证得 $\Delta(\Delta v)=0.$

【3315】 设 $f(x,y,z)$是 m 阶可微的 n 次齐次函数. 证明:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y,z).$$

证 证法 1:

根据齐次函数的定义知,函数 $f(x,y,z)$满足

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z). \tag{1}$$

在(1)式两端分别对 t 求 m 次导数. 首先考察$\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}t^m}$. 由求全导数的公式知

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=x\frac{\partial f}{\partial(xt)}+y\frac{\partial f}{\partial(yt)}+z\frac{\partial f}{\partial(zt)}=t^{n-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z.).$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=x\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(yt)}+z\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(zt)}\right\}+y\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(xt)}+y\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)^2}+z\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(zt)}\right\}$$

$$+z\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(xt)}+y\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(yt)}+z\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)^2}\right\}$$

$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)^2}+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(yt)}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(zt)}+2zx\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(xt)}$$

$$=t^{n-2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z).$$

一般地,由数学归纳法可得

$$\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}t^m}=\sum_{a_1+a_2+a_3=m}C_{a_1,a_2,a_3}\frac{\partial^m f}{\partial(xt)^{a_1}\partial(yt)^{a_2}\partial(zt)^{a_3}}x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}=t^{n-m}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z), \tag{2}$$

其中总和是关于 $a_1+a_2+a_3=m$ 的非负整数 a_1,a_2,a_3的一切可能组合而取的,且

$$C_{a_1,a_2,a_3}=\frac{m!}{a_1!a_2!a_3!}.$$

而(1)式右端对 t 求 m 次导数,得

$$[t^n f(x,y,z)]^{(m)}=n(n-1)\cdots(n-m+1)t^{n-m}f(x,y,z). \tag{3}$$

比较(2)式和(3)式,令 $t=1$,即证得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y,z).$$

证法 2:

当 $m=1$ 时,由 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ 两端对 t 求导,可得

$$x\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tx)}+y\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(ty)}+z\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tz)}=nt^{n-1}f(x,y,z)\quad(t>0).$$

令 $t=1$，即有
$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^1 f=nf.$$

当 $m=2$ 时，由 3234 题的结果知 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=n(n-1)f.$

在 3233 题中已证得 $f'_x(x,y,z),f'_y(x,y,z),f'_z(x,y,z)$ 为 $(n-1)$ 次的齐次函数.

今设 $m=k-1$ 时命题成立. 对 f'_x,f'_y,f'_z，用数学归纳法的假设，即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_x=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_x, \tag{4}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_y=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_y, \tag{5}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_z=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_z, \tag{6}$$

将(4)两端乘以 x，(5)式两端乘以 y，(6)式两端乘以 z，然后相加，即得

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k} f(x,y,z)&=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)\\&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f(x,y,z).\end{aligned}$$

即当 $m=k$ 时命题也成立.

于是，命题对于一切正整数 m 成立，即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m} f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f.$$

【3316】 若 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$，其中 f 为可微函数. 试简化表达式

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 $\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}=\sec x\cos xf'+\sec y(\cos y-\cos yf')=f'+1-f'=1,$

即 $\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}=1.$

【3317】 证明：函数
$$z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

(其中 f 为任意的可微函数)满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$

证 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left\{nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x^2}\right)-\frac{2x^n y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)\right\}+2y\frac{x^n}{x^2}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)=nx^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)=nz,$

即 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$

【3318】 证明：
$$z=yf(x^2-y^2)$$

(其中为任意的可微函数)满足方程 $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$

证 $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=y^2 2xyf'+xy(f-2y^2f')=xyf=xz,$

即 $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$

【3319】 若
$$u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x,z-x),$$

其中 f 为可微的函数. 试简化表达式 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2(y+z)+xyz-f'_1-f'_2,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2z+f'_1,$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2y+f'_2.$$

将上述三式相加，即得 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$

【3320】 设 $x^2=vw,\ y^2=uw,\ z^2=uv.\ f(x,y,z)=F(u,v,w).$

证明：
$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w.$$

证 把 u,v,w 当作自变量*)，故

$$uF'_u=uf'_x x'_u+uf'_y y'_u+uf'_z z'_u,\quad vF'_v=vf'_x x'_v+vf'_y y'_v+vf'_z z'_v,$$
$$wF'_w=wf'_x x'_w+wf'_y y'_w+wf'_z z'_w.$$

将上述三式相加，得

$$uF'_u+vF'_v+wF'_w=(ux'_u+vx'_v+wx'_w)f'_x+(uy'_u+vy'_v+wy'_w)f'_y+(uz'_u+vz'_v+wz'_w)f'_z. \tag{1}$$

由题设得 $2x\frac{\partial x}{\partial u}=0$. 因为 x 不恒等于零，所以 $\frac{\partial x}{\partial u}=0$. 同法可得 $\frac{\partial y}{\partial v}=0,\ \frac{\partial z}{\partial w}=0.$

再由题设，得 $2x\frac{\partial x}{\partial w}=v,\ 2x\frac{\partial x}{\partial v}=w,\ 2y\frac{\partial y}{\partial u}=w,\ 2y\frac{\partial y}{\partial w}=u,\ 2z\frac{\partial z}{\partial u}=v,\ 2z\frac{\partial z}{\partial v}=u.$

将上述结果代入(1)式，得

$$uF'_u+cF'_v+wF'_w=\left(\frac{vw}{2x}+\frac{wv}{2x}\right)f'_x+\left(\frac{uw}{2y}+\frac{wu}{2y}\right)f'_y+\left(\frac{uv}{2z}+\frac{vu}{2z}\right)f'_z=xf'_x+yf'_y+zf'_z.$$

即 $uF'_u+vF'_v+wF'_w=xf'_x+yf'_y+zf'_z.$

*) 如果把 x,y,z 当作自变量，也可以证明本题的结果.

假定任意函数 φ,ψ 等为足够多次可微的函数，验证下列等式：

【3321】 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$，若 $z=\varphi(x^2+y^2)$.

证 由于 $y\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot 2x\varphi'(x^2+y^2),\quad x\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot 2y\varphi'(x^2+y^2),$

所以 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

【3322】 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$，若 $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$.

证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=x^2\left[-\frac{y^2}{3x^2}+y\varphi'(x,y)\right]-xy\left(\frac{2y}{3x}+x\varphi'(xy)\right)+y^2=0.$

【3323】 $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$，若 $z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

证 $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2-y^2)e^y\frac{x\varphi'}{y^2}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}+xy\left[e^y\varphi+e^y\varphi'\left(e^{\frac{x^2}{2y^2}}-\frac{x^2}{y^3}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)\right]=xye^y\varphi=xyz.$

【3324】 $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$，若 $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha},\frac{z}{x^\beta}\right)$.

证 $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nx^n\varphi-\alpha x^{n-\alpha}y\varphi'_1-\beta x^{n-\beta}z\varphi'_2+\alpha yx^{n-\alpha}\varphi'_1+\beta zx^{n-\beta}\varphi'_2=nx^n\varphi=nu.$

【3325】 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$，若 $u=\frac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$.

证 $x\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{xy}{z}\ln x+\frac{xy}{z}+x\varphi-y\varphi'_1-z\varphi'_2,\quad y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy}{z}\ln x+y\varphi'_1,\quad z\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{z}\ln x+z\varphi'_2.$

将上述三式相加，即得 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}.$

【3326】 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，若 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$.

证 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''+a^2\psi'',\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''+\psi''.$

将上述二式比较，即得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【3327】 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，若 $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$.

证 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi+y\psi'+x\varphi'$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x\varphi'+\psi+y\psi'$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\varphi'+y\psi''+x\varphi'',\tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'+\psi'+y\psi''+x\varphi'',\tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\varphi''+2\psi'+y\psi''.\tag{3}$$

(1)－2×(2)＋(3)，即得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

【3328】 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，若 $u=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

证 $u_1=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$为零次齐次函数，$u_2=x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$为一次齐次函数. 由 3234 题的结果(对于二元更成立)知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_1=0,\qquad \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_2=0.$$

于是，

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_1+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_2=0.$$

注 也可不用 3234 题的结果，求出偏导数直接验证.

【3329】 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$，若 $u=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

证明思路 注意 $u_1=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$为 n 次齐次函数，$u_2=x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$为$1-n$次齐次函数. 对函数 u_1 及 u_2 应用 3234 题的结果(对于二元更成立)，即知

$$\text{原式左端}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

证 $u_1=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$为 n 次齐次函数，$u_2=x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$为$1-n$次齐次函数. 由 3234 题的结果知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_1=n(n-1)u_1,\quad \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_2=(1-n)(1-n-1)u_2=n(n-1)u_2.$$

于是，$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)=n(n-1)(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

值得注意的是，3328 题即为本题的特殊情形：$n=0$.

【3330】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，若 $u=\varphi[x+\psi(y)]$.

证 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''\psi'$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'\psi'$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''$. 于是，$\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

用逐次微分的方法消去任意函数 φ 和 ψ：

【3331】 $z=x+\varphi(xy)$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+y\varphi'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\varphi'$. 于是，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$.

【3332】 $z=x\varphi\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi+\frac{x}{y^2}\varphi'$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^3}\varphi'$. 于是，$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x\varphi+\frac{2x^2}{y^2}\varphi'-\frac{2x^2}{y^2}\varphi'=2x\varphi=2z$，

即 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

【3333】 $z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x\varphi'}{\sqrt{x^2+y^2}}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\varphi'}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 于是，$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

【3334】 $u=\varphi(x-y,y-z)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_1'$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\varphi_1'+\varphi_2'$， $\frac{\partial u}{\partial z}=-\varphi_2'$. 于是，$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

【3335】 $u=\varphi\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$.

提示 易得 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\varphi_1'$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\varphi_1'+\frac{1}{z}\varphi_2'$， $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\varphi_2'$. 于是，$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$ *).

*) 注意到 $\varphi(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$ 为零次齐次函数，本题即 3315 题的特殊情形：$n=0$.

【3336】 $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x)$. 于是，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

【3337】 $z=\varphi(x)\psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\psi$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi\psi'$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'\psi'$. 于是，$z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$.

【3338】 $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'+\psi'$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'-\psi'$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\varphi''+\psi''$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi''+\psi''$. 于是，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【3339】 $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

提示 注意函数 z 为一次齐次函数，利用 3315 题的结果即获解.

解 注意到函数 z 为一次齐次函数，由 3315 题知

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

【3340】 $z=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

解 设 $z_1=\varphi(xy)$，则由 3331 题知 $\quad x\frac{\partial z_1}{\partial x}-y\frac{\partial z_1}{\partial y}=0$.

又 $z_2=\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ 为零次齐次函数，且函数 $x\frac{\partial z_2}{\partial x}-y\frac{\partial z_2}{\partial y}=\frac{2x}{y}\psi'$ 也为零次齐次函数. 从而，函数

$$u=x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x\frac{\partial z_1}{\partial x}-y\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)+\left(x\frac{\partial z_2}{\partial x}-y\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)$$

是零次齐次函数. 于是，由 3315 题知 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0$. 但是，

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y},$$

故得
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

【3341】 求函数 $z=x^2-y^2$ 在点 $M(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成角 $\alpha=60°$ 的方向 l 的导数.

解 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2$， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-2.\cos\alpha=\cos60°=\frac{1}{2}$， $\cos\beta=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

于是， $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2\ \frac{1}{2}+(-2)\ \frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}$.

【3342】 求函数 $x=x^2-xy+y^2$ 在点 $M(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 的导数. 在怎样的方向上此导数：

(1)有最大值； (2)有最小值； (3)等于 0.

解 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=1$， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=1$. 于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\cos\alpha+\cos(90°-\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

(1) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最大；

(2) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-1$，即 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最小；

(3) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=0$，即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}=0$.

【3343】 求函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 沿与过此点的等值线垂直方向的导数.

解 与等值线垂直的方向即梯度的方向或与梯度相反的方向. 于是

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\pm\left.|\mathrm{grad}z|\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\pm\left.\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\pm\sqrt{\left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2+\left(\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2}$$

$$=\pm\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

【3344】 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在此点的内法线方向的导数.

解 曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是函数 z 的一条等值线. 随着 x,y 的绝对值增大，z 是减少的，因此，曲线的内法线方向即梯度方向. 于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}=\left.|\mathrm{grad}z|\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}=\left.\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}}\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}\quad(a>0,\ b>0).$$

【3345】 求函数 $u=xyz$ 在点 $M(1,1,1)$ 沿方向 $l\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 的导数. 函数在该点的梯度的大小是什么？

解 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$. $\qquad \left.|\mathrm{grad}u|\right|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\left.\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\sqrt{3}$.

【3346】 求函数 $u=\frac{1}{r}$（式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处梯度的大小和方向.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$. 于是，

$$\mathrm{grad}u=-\frac{1}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

或简记成 $\qquad \mathrm{grad}u=\left\{-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right\}$.

在点 M_0 处的梯度为 $\qquad \mathrm{grad}u=\left\{-\frac{x_0}{r_0^3},-\frac{y_0}{r_0^3},-\frac{z_0}{r_0^3}\right\}$，

其中 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. 从而得

$$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{\left(-\frac{x_0}{r_0^3}\right)^2+\left(-\frac{y_0}{r_0^3}\right)^2+\left(-\frac{z_0}{r_0^3}\right)^2}=\frac{1}{r_0^2},$$

$$\cos(\mathrm{grad}\,\widehat{u,x})=\frac{-\frac{x_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{x_0}{r_0},\quad \cos(\mathrm{grad}\,\widehat{u,y})=\frac{-\frac{y_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{y_0}{r_0},\quad \cos(\mathrm{grad}\,\widehat{u,z})=\frac{-\frac{z_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{z_0}{r_0}.$$

【3347】 求函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点 $A(\varepsilon,0,0)$ 及 $B(0,\varepsilon,0)$ 二点的梯度之间的角度.

解 $\mathrm{grad}u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\{2x,2y,-2z\}$. 若以 $\mathrm{grad}u_A$ 及 $\mathrm{grad}u_B$ 分别表示在 A 点及 B 点的梯度，则有

$$\mathrm{grad}u_A=\{2\varepsilon,0,0\},\quad \mathrm{grad}u_B=\{0,2\varepsilon,0\}.$$

由于
$$\mathrm{grad}u_A\cdot\mathrm{grad}u_B=2\varepsilon\cdot0+0\cdot2\varepsilon+0\cdot0=0,$$
故知 $\mathrm{grad}u_A\perp\mathrm{grad}u_B$，即在点 A 及点 B 二点的梯度之间的夹角为

$$(\mathrm{grad}\,\widehat{u_A,\mathrm{grad}}u_B)=\frac{\pi}{2}.$$

【3348】[+] 在点 $M(1,2,2)$处，函数

$$u=x+y+z\quad 和\quad v=x+y+z+0.001\sin(10^6\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

的梯度之大小相差多少？

解 $\mathrm{grad}u=\{1,1,1\}$，$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{3}$.

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\frac{\partial v}{\partial x}=1-1000\pi\frac{x}{r}\cos(10^6\pi r),\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=1-1000\pi\frac{y}{r}\cos(10^6\pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=1-1000\pi\frac{z}{r}\cos(10^6\pi r).$$

在点 $M(1,2,2)$处 $\quad\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1000\pi}{3}+1\approx\frac{1000\pi}{3},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2000\pi}{3}+1\approx\frac{2000\pi}{3},$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{2000\pi}{3}+1\approx\frac{2000\pi}{3},\quad |\mathrm{grad}v|\approx1000\pi\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1000\pi.$$

于是，两梯度之大小相差为 $\quad |\mathrm{grad}v|-|\mathrm{grad}u|\approx1000\pi-\sqrt{3}\approx3140.$

【3349】 证明：在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处，函数

$$u=ax^2+by^2+cz^2\quad 及\quad v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

$(a,b,c,m,n,p$ 为常数且 $a^2+b^2+c^2\neq0)$二者的梯度之间的角度当点 M_0 无限远移时趋于零.

证 本题的题设条件"点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$无限远移"应该理解为"$x_0\to\infty$，$y_0\to\infty$，$z_0\to\infty$同时成立"(此时 $\sqrt{(ax_0)^2+(by_0)+(cz_0)^2}\to+\infty$). 否则，本题的结论不成立.

显见有

$$\mathrm{grad}u=\{2ax_0,2by_0,2cz_0\},\quad \mathrm{grad}v=\{2ax_0+2m,2by_0+2n,2cz_0+2p\},$$

令

$$\alpha=ax_0,\ \beta=by_0,\ \gamma=cz_0;\ \alpha_1=ax_0+m=\alpha+m,\ \beta_1=by_0+n=\beta+n,\ \gamma_1=cz_0+p=\gamma+p.$$

于是，$\mathrm{grad}u$ 与 $\mathrm{grad}v$ 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}}$$

或

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$=\frac{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2+(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)^2+(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

令 $\delta=\max(|ax_0|,|by_0|,|cz_0|)=\max(|\alpha|,|\beta|,|\gamma|)$，则

$$\delta\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\leqslant\sqrt{3}\delta.$$

于是，当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$ 时，$\delta\to+\infty$.

再令 $q=\max(|m|,|n|,|p|)$，则下述不等式显然成立：

$$0\leqslant\sin^2\theta=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$\leqslant\frac{(2q\delta)^2+(2q\delta)^2+(2q\delta)^2}{\delta^2(\delta^2-6\delta q-3q^2)}=\frac{12q^2}{\delta^2-6\delta q-3q^2}\to0\quad(\text{当 }\delta\to+\infty\text{ 时}).$$

于是，当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$ 时，$\sin^2\theta\to0$，即当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$，$\theta\to0$. 证毕.

【3350】 设 $u=f(x,y,z)$ 为二阶可微的函数. 若 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦，求

$$\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right).$$

解 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$

$$\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\cos\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cos\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z\partial y}\cos\gamma\right)\cos\beta$$

$$+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\cos\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\cos\gamma\right)\cos\gamma$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\cos^2\gamma+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma+2\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\cos\alpha.$$

【3351】 设 $u=f(x,y,z)$ 为二阶可微的函数及

$$l_1\{\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1\},\quad l_2\{\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2\},\quad l_3\{\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3\}$$

为三个互相垂直的方向. 证明：

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$；

(2) $\dfrac{\partial^2u}{\partial l_1^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial l_2^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial l_3^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}.$

证 (1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_i+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_i+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_i\right)^2$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i.\tag{1}$$

由于 l_1,l_2,l_3 是互相垂直的三个单位向量，故

$$\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i=0,\quad\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i=0,\quad\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i=1,\quad\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i=1,\quad\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i=1.\tag{2}$$

将上述诸等式(2)代入(1)式，即得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

(2) 利用 3350 题的结果，得

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2u}{\partial l_i^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i+2\frac{\partial u\partial u}{\partial x\partial y}\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i$$

$$+2\frac{\partial u\partial u}{\partial y\partial z}\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i+2\frac{\partial u\partial u}{\partial z\partial x}\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i.\tag{3}$$

将诸等式(2)代入(3)式，即得 $\dfrac{\partial^2u}{\partial l_1^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial l_2^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial l_3^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}.$

【3352】 设 $u=u(x,y)$为可微的函数且当 $y=x^2$ 时有

$$u(x,y)=1 \quad 及 \quad \frac{\partial u}{\partial x}=x.$$

求当 $y=x^2$时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $\frac{d}{dx}u(x,x^2)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$.

当 $y=x^2$，$u(x,y)=u(x,x^2)=1$，故$\frac{du(x,x^2)}{dx}=0$，且有$\frac{\partial u}{\partial x}=x$，$\frac{dy}{dx}=2x$. 将这些结果代入上式，即得

$$x+2x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

于是，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}$ $(x\neq 0)$.

【3353】 设函数 $u=u(x,y)$满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 以及下列条件：

$$u(x,2x)=x, \quad u'_x(x,2x)=x^2.$$

求：$u''_{xx}(x,2x)$， $u''_{xy}(x,2x)$， $u''_{yy}(x,2x)$.

解 由于 $u(x,2x)=x$，故

$$u'_x(x,2x)+2u'_y(x,2x)=1. \tag{1}$$

又因 $u'_x(x,2x)=x^2$，故由(1)式即得

$$u'_y(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}. \tag{2}$$

将(2)式两端对求 x 导数，有

$$u''_{yx}(x,2x)+2u''_{yy}(x,2x)=-x; \tag{3}$$

由 $u'_x(x,2x)=x^2$ 两端对 x 求导数，有

$$u''_{xx}(x,2x)+2u''_{xy}(x,2x)=2x. \tag{4}$$

联立(3)式和(4)式并利用题设条件 $u''_{xx}=u''_{yy}$，解之，即得

$$u''_{xx}(x,2x)=u''_{yy}(x,2x)=-\frac{4}{3}x, \quad u''_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x.$$

假设 $z=z(x,y)$，解下列方程：

【3354】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(y)$， $z=x\varphi(y)+\psi(y)$.

【3355】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\psi_1(x)$，$z=\int_0^x\varphi_1(t)dt+\psi(y)=\varphi(x)+\psi(y)$.

【3356】 $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=0$.

解 $\frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}=\bar{\varphi}_{n-1}(x)$，$\frac{\partial^{n-2} z}{\partial y^{n-2}}=y\bar{\varphi}_{n-1}(x)+\bar{\varphi}_{n-2}(x)$，累次积分 n 次，最后得

$$z=y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)+y^{n-2}\varphi_{n-2}(x)+\cdots+y\varphi_1(x)+\varphi_0(x).$$

【3357】 假设 $u=u(x,y,z)$，解方程 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0$.

解 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi_1(x,y)$， $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_2(x,y)+\psi_1(x,z)$， $u=\varphi(x,y)+\psi(x,z)+\chi(y,z)$

【3358】 求方程$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ 的解 $z=z(x,y)$，使它满足条件 $z(x,x^2)=1$.

解 由$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$，得 $z=x^2y+y^2+\varphi(x)$.

又因 $z(x,x^2)=1$，故 $1=x^4+x^4+\varphi(x)$，从而有 $\varphi(x)=1-2x^4$.

最后得 $z=1+x^2y+y^2-2x^4$.

【3359】 求方程$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 的解 $z=z(x,y)$，使它满足条件 $z(x,0)=1$，$z'_y(x,0)=x$.

解 由$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 得 $\frac{\partial z}{\partial y}=2y+\varphi(x)$.

又因 $z'_y(x,0)=x$，所以，$x=0+\varphi(x)$ 或 $x=\varphi(x)$. 从而有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x.$$

由此得 $z=y^2+xy+\varphi_1(x)$.

又因 $z(x,0)=1$，故 $1=0+0+\varphi_1(x)$ 或 $1=\varphi_1(x)$. 最后得

$$z=1+xy+y^2.$$

【3360】 求方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 的解 $z=z(x,y)$，使它满足条件 $z(x,0)=x$，$z(0,y)=y^2$.

解 由$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi_1(x),\quad z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\varphi(x)+\psi(y).$$

现确定 $\varphi(x)$及 $\psi(y)$. 由于 $z(x,0)=x$，$z(0,y)=y^2$，故有

$$x=\varphi(x)+\psi(0),\quad y^2=\varphi(0)+\psi(y),$$

于是，

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-[\varphi(0)+\psi(0)].$$

又因 $z(0,0)=0$，故 $\varphi(0)+\psi(0)=0$. 最后得

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}xy(x+y).$$

§3. 隐函数的微分法

1° **存在定理** 设：1)函数 $F(x,y,z)$在某点 $\hat{A}(x_0,y_0,z_0)$等于零；2)$F(x,y,z)$和 $F'_z(x,y,z)$在点$\hat{A}_0$ 的邻域内有定义并且是连续的；3)$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则在点 $A_0(x_0,y_0)$的某充分小的邻域内存在唯一的单值连续函数

$$z=f(x,y),\tag{1}$$

它满足方程 $F(x,y,z)=0$

而且 $z_0=f(x_0,y_0)$.

2° **隐函数的可微性** 设除了上述条件，还有 4)函数 $F(x,y,z)$在点$\hat{A}_0(x_0,y_0,z_0)$的邻域内可微，则函数(1)在点 $A_0(x_0,y_0)$的邻域内也可微，并且它的导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0\tag{2}$$

求得. 若函数 $F(x,y,z)$任意多次可微，则采用对方程(2)逐次微分的方法也可计算函数 z 的高阶导数.

3° **由方程组定义的隐函数** 设函数 $F_i(x_1,\cdots,x_m;\ y_1,\cdots,y_n)(i=1,2,\cdots,n)$满足下列条件：

(ⅰ) 在点$\hat{A}_0(x_{10},\cdots,x_{m0};\ y_{10},\cdots,y_{n0})$等于零； (ⅱ) 在点$\hat{A}_0$ 的邻域内可微；

(ⅲ) 在点$\hat{A}_0$ 函数行列式$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0$.

在这种情况下，方程组

$$F_i(x_1,\cdots,x_m;\ y_1,\cdots,y_n)=0\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{3}$$

在点 $A_0(x_{10},\cdots,x_{m0})$ 的某邻域内唯一地确定出一组单值可微函数

$$y_i=f_i(x_1,\cdots,x_m)\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

它们满足方程(3)及初始条件 $f_i(x_{10},\cdots,x_{m0})=y_{i0}\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

这些隐函数的微分可由以下方程组求得：

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\mathrm{d}y_k=0\quad(i=1,2,\cdots,n)^{*}$$

【3361】 证明：在每一点都不连续的狄利克雷函数

$$y(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数；}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

满足方程 $y^2-y=0$.

证 当 x 为有理数时，$y^2-y=1-1=0$；当 x 为无理数时，$y^2-y=0-0=0$. 因此，不论 x 为任何实数 x，均有

$$y^2-y=0.$$

【3362】 设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a,b) 内. 在怎样的情况下，方程 $f(x)y=0$ 在 $a<x<b$ 时有唯一连续的解 $y=0$?

解 函数 $f(x)$ 的非零点的集合在区间 (a,b) 内是处处稠密的，即 $f(x)$ 的零点的集合不能充满区间 (a,b) 的任意一个子区间 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$. 此时，方程 $f(x)y=0$ 有唯一连续的解 $y=0$. 事实上，设 $y=y(x)$ 为方程 $f(x)y=0$ 的一个连续解，$x_0\in(a,b)$，则

(1) 当 $f(x_0)\neq0$ 时，显然有 $y(x_0)=0$；

(2) 当 $f(x_0)=0$ 时，由 $f(x)$ 的非零点的稠密性知：存在数列 $\{x_n\}$，满足 $x_n\to x_0$ 及 $f(x_n)\neq0$ $(n=1,2,\cdots)$. 于是，$y(x_n)=0$. 由 $y(x)$ 的连续性即得 $y(x_0)=y(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)=0$.

于是，当 $a<x<b$ 时，$y\equiv0$.

反之，若方程 $f(x)y=0$ 在 (a,b) 内只有唯一的连续解 $y=0$，则 $f(x)$ 的零点集必不能充满 (a,b) 的任何子区间. 事实上，设在 (a,b) 的某子区间 (α,β) 上 $f(x)\equiv0$. 定义 (a,b) 上的函数 $y_0(x)$ 如下：

$$y_0(x)=\begin{cases}0, & a<x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4},\\ \dfrac{4}{\beta-\alpha}\left(x-\alpha-\dfrac{\beta-\alpha}{4}\right), & \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}\leqslant x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2},\\ -\dfrac{4}{\beta-\alpha}\left[x-\alpha-\dfrac{3(\beta-\alpha)}{4}\right], & \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\leqslant x\leqslant\alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha),\\ 0, & \alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha)<x<b.\end{cases}$$

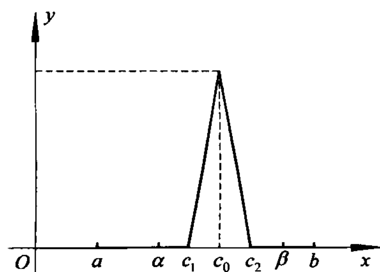


图 6.27

* 在陈述本节大多数题目时，无条件地假定隐函数和它们的相应导数存在的条件满足.

如图 6.27 所示，图中 $c_1=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{4}$， $c_0=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}$， $c_2=\alpha+\frac{3(\beta-\alpha)}{4}$.

显然，$y_0(x)\neq 0$，但 $y=y_0(x)$是方程 $f(x)y=0$ 在(a,b)上的一个连续解.

【3363】 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间(a,b)内有定义且连续. 在怎样的情况下，方程

$$f(x)y=g(x)$$

在区间(a,b)内有唯一连续的解.

解 下面三个条件显然是必要的：

(1) $f(x)$的零点必须是 $g(x)$的零点，否则 y 无解；

(2) $f(x)$的非零点集合必须在(a,b)内稠密. 否则，存在$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$，当 $x\in(\alpha,\beta)$时，恒有 $f(x)=g(x)=0$. 从而当 $x\in(\alpha,\beta)$时，任意改变原方程一个连续解 $y(x)$的函数值(但保持连续性)就得出原方程的另一个连续解(参看 3362 题的图)，此与原方程连续解的唯一性矛盾.

(3) 如果 $f(x_0)=0$，则对任一点列 $x_n\to x_0$，$f(x_n)\neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{f(x_n)}=y_0 \quad (y_0 \text{ 是有限数且只与 } x_0 \text{ 有关}).$$

显然，如果上述极限不存在或对不同的数列取不同的值均导致 y 不连续.

反之，若上述三个条件满足，我们证明原方程的连续解存在且唯一. 事实上，这时令

$$y_0(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{f(x)}, & \text{在 } f(x)\neq 0 \text{ 的点}, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(x_n)}{f(x_n)}, & \text{在 } f(x)=0 \text{ 的点}, \end{cases}$$

这里任取 $x_n\to x$，$f(x_n)\neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$. 易知 $y_0(x)$是(a,b)内的连续函数且满足原方程，即是原方程的一个连续解. 现若原方程在(a,b)内还有一连续解 $y=y_1(x)$，则

$$f(x)y_1(x)=g(x), \quad f(x)y_0(x)=g(x) \quad (a<x<b).$$

对任何 $x_0\in(a,b)$，若 $f(x_0)\neq 0$，则 $y_1(x_0)=\frac{g(x_0)}{f(x_0)}=y_0(x_0)$；若 $f(x_0)=0$，取 $x_n\to x_0$，$f(x_n)\neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$则根据 $y_1(x)$的连续性，得 $y_1(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}y_1(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{f(x_n)}=y_0(x_0)$.

于是，$y_1(x)\equiv y_0(x)$ $(a<x<b)$，唯一性获证.

【3364】 已知方程

$$x^2+y^2=1, \tag{1'}$$

设

$$y=y(x) \quad (-1\leqslant x\leqslant 1) \tag{2'}$$

为满足方程(1′)的单值函数.

(1) 有多少单值函数(2′)满足方程(1′)？

(2) 有多少单值连续函数(2′)满足方程(1′)？

(3) 设：(ⅰ)$y(0)=1$；(ⅱ)$y(1)=0$，则有多少单值连续函数(2′)满足方程(1′)？

解 (1) 无限个. 例如，令

$$y_n(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq \dfrac{1}{n}, \\ -\sqrt{1-x^2}, & x=\dfrac{1}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots), \end{cases}$$

则显然 $y=y_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$都是满足方程(1′)的单值函数.

(2) 二个：$y=-\sqrt{1-x^2}$及 $y=\sqrt{1-x^2}$.

(3) (ⅰ)满足条件 $y(0)=1$ 的仅 $y=\sqrt{1-x^2}$这一个连续函数；

(ⅱ)满足条件 $y(1)=0$ 的有 $y=-\sqrt{1-x^2}$及 $y=\sqrt{1-x^2}$这二个连续函数.

【3365】 已知方程

$$x^2=y^2, \tag{1'}$$

设

$$y=y(x) \quad (-\infty<x<+\infty) \tag{2'}$$

是满足方程(1′)的单值函数.

(1) 有多少单值函数(2′)满足方程(1′)?

(2) 有多少单值连续函数(2′)满足方程(1′)?

(3) 有多少单值可微函数(2′)满足方程(1′)?

(4) 设:(ⅰ)$y(1)=1$;(ⅱ)$y(0)=0$,则有多少单值连续函数(2′)满足方程(1′)?

(5) 设 $y(1)=1$ 及 δ 为充分小的数,则有多少单值连续函数 $y=y(x)$ $(1-\delta<x<1+\delta)$满足方程(1′)?

解 (1) 无限个. 例如,

$$y_n(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq\dfrac{1}{n},\\ -|x|, & x=\dfrac{1}{n},\end{cases} \quad (n=1,2,\cdots)$$

都是.

(2) 四个:$y=-x$. $y=x$, $y=|x|$ 和 $y=-|x|$.

(3) 二个:$y=-x$ 和 $y=x$.

(4) (ⅰ)二个:$y=x$ 和 $y=|x|$;(ⅱ)四个:即(2)中之四个.

(5) 一个:$y=x$.

【3366】[+] 方程 $x^2+y^2=x^4+y^4$ 定义出多值函数 $y(x)$. 函数在怎样的区域内:

(1)单值, (2)有二个值, (3)有三个值, (4)有四个值?

求此函数的分支点及它的单值连续的各分支.

解 由 $x^2+y^2=x^4+y^4$ 得 $y^4-y^2+(x^4-x^2)=0$. 解之,得 $y^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}$. 一共有单值连续的六支,其中当 $\frac{1}{4}+x^2-x^4\geqslant0$ 即 $|x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ 时有二支:

$$y_1=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}, \quad |x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}; \quad y_2=-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}, \quad |x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

而当 $0\leqslant\frac{1}{4}+x^2-x^4\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 即 $1\leqslant x^2\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时有四支:

$$y_3=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}, \ 1\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}; \quad y_4=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}, \ -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\leqslant x\leqslant-1;$$

$$y_5=-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}, \ 1\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}; \quad y_6=-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}, \ -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\leqslant x\leqslant-1.$$

此外还有一个孤立点(0,0)(参看 1542 题的图像). 考虑上述六支的公共定义域知:

(1) 没有单值区域.

(2) 双值区域为 $0<|x|<1$ 及 $x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

(3) 三值区域为 $x=0$ 及 $x=\pm1$.

(4) 四值区域为 $1<|x|<\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. 支点的必要条件为 $[y^4-y^2+(x^4-x^2)]'_y=0$, 即 $4y^3-2y=0$. 于是,$y=0$ 及 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. 由 $y=0$ 解得 $x=0$ 及 $x=\pm1$;而由 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 解得 $x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. 经验证,得六个支点:

$$(-1,0),\qquad (1,0),\qquad \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

【3367】 求由方程$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$所定义的多值函数y的分支点和单值连续的各分支

$$y=y(x)\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

解 由$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$得 $\quad y^2=\dfrac{-(1+2x^2)\pm\sqrt{8x^2+1}}{2}.$

因为当$|x|\leqslant 1$时，$\sqrt{8x^2+1}\geqslant 1+2x^2$，故单值连续的各分支为(共有四分支)

$$y=\varepsilon(x)\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-(1+2x^2)}{2}}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

其中$\varepsilon(x)$分别为1，-1，$\operatorname{sgn}x$，$-\operatorname{sgn}x$.

下面再求分支点：

$$[(x^2+y^2)^2-x^2+y^2]'_y=2(x^2+y^2)2y+2y=0,$$

解之得$y=0$，从而得$x=0$及$x=\pm1$. 经验证得分支点为

$$(0,0),\ (1,0)\quad 及\quad(-1,0).$$

【3368】 设函数$f(x)$当$a<x<b$时连续，函数$\varphi(y)$当$c<y<d$时单调增加而且连续. 在怎样的条件下，方程$\varphi(y)=f(x)$定义出单值函数$y=\varphi^{-1}[f(x)]$?

研究例子：(ⅰ)$\sin y+\operatorname{sh}y=x$； (ⅱ)$e^{-y}=-\sin^2x$.

解 根据$\varphi(y)$的严格增加性以及$\varphi(y)$、$f(x)$的连续性可知，若存在(x_0,y_0)满足$\varphi(y_0)=f(x_0)$，则在x_0近旁由方程$\varphi(y)=f(x)$可唯一地确定y为x的单值连续函数

$$y=\varphi^{-1}[f(x)]\quad(满足\ y_0=\varphi^{-1}[f(x_0)]);\tag{1}$$

若更设满足不等式

$$\lim_{y\to c+0}\varphi(y)<f(x)<\lim_{y\to d-0}\varphi(x)\quad(a<x<b),\tag{2}$$

则显然函数(1)是整个$a<x<b$上定义的连续函数.

(ⅰ) 设$\varphi(y)=\sin y+\operatorname{sh}y\ (-\infty<y<+\infty)$，$f(x)=x\ (-\infty<x<+\infty)$. 由于$\varphi'(y)=\cos y+\operatorname{ch}y>0\ (-\infty<y<+\infty)$，故$\varphi(y)$是$-\infty<y<+\infty$上的严格增函数，又显然有

$$\lim_{y\to-\infty}\varphi(y)=-\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}\varphi(y)=+\infty,$$

故不等式(2)满足. 于是，由方程$\sin y+\operatorname{sh}y=x$唯一确定$y$为$x$的连续函数，它定义在整个数轴：$-\infty<x<+\infty$上.

(ⅱ) $\varphi(y)=e^{-y}$及$f(x)=-\sin^2x$虽然也满足题设条件，但此方程是矛盾的($e^{-y}>0$，$-\sin^2x\leqslant0$)，即不存在点(x_0,y_0)，使有$e^{-y_0}=-\sin x_0$. 因此，不能定义y为x的单值函数.

【3369】 设

$$x=y+\varphi(y),\tag{1}$$

其中$\varphi(0)=0$，且当$-a<y<a$时$\varphi'(y)$连续并满足$|\varphi'(y)|\leqslant k<1$. 证明：当$-\varepsilon<x<\varepsilon$时存在唯一的可微函数$y=y(x)$满足方程(1)且$y(0)=0$.

证 设$F(x,y)=x-y-\varphi(y)$，则

(ⅰ) 由于$\varphi(0)=0$，故$F(0,0)=0$；

(ⅱ) 当$-\infty<x<+\infty$，$-a<y<a$时，$F(x,y)$，$F'_x(x,y)$及$F'_y(x,y)=-1-\varphi'(y)$均连续；

(ⅲ) $F'_y(0,0)=-1-\varphi'(0)<0$，当然$F'_y(0,0)\neq0$.

于是，由隐函数的存在及可微性定理知：存在$\varepsilon>0$，使当$-\varepsilon<x<\varepsilon$时，存在唯一的可微函数$y=y(x)$满足方程$x=y+\varphi(y)$及$y(0)=0$.

【3370】 设$y=y(x)$为由方程$x=ky+\varphi(y)$所定义的隐函数，其中常数$k\neq0$，且$\varphi(y)$为以ω为周期的

可微周期函数,且 $|\varphi'(y)|<|k|$. 证明:$y=\frac{x}{k}+\psi(x)$,其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数.

证 由于 $x=ky+\varphi(y)$,故 $\frac{dx}{dy}=k+\varphi'(y)$. 又因 $|\varphi'(y)|<|k|$,故 $\frac{dx}{dy}$ 与 k 同号,即 x 为 y 的严格单调函数,且为连续的. 由于 $\varphi(y)$ 是连续的以 ω 为周期的函数,故有界,从而,当 $k>0$ 时,

$$\lim_{y\to-\infty} x=-\infty,\quad \lim_{y\to+\infty} x=+\infty;$$

当 $k<0$ 时,

$$\lim_{y\to-\infty} x=+\infty,\quad \lim_{y\to+\infty} x=-\infty;$$

由此可知,其反函数 $y=y(x)$ 存在唯一,且是 $-\infty<x<+\infty$ 上有定义的严格单调可微函数. 令

$$y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty), \tag{1}$$

则由 $x=ky(x)+\varphi[y(x)]$, $\varphi[y(x)+\omega]=\varphi[y(x)]$ 知,

$$x+k\omega=ky(x)+\varphi[y(x)]+k\omega=k[y(x)+\omega]+\varphi[y(x)+\omega].$$

从而,根据反函数的唯一性,得

$$y(x+k\omega)=y(x)+\omega\quad(-\infty<x<+\infty). \tag{2}$$

由(1)式与(2)式,得

$$\psi(x+k\omega)=y(x+k\omega)-\frac{x+k\omega}{k}=y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

同理可证

$$\psi(x-k\omega)=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty),$$

故 $\psi(x)$ 是以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数. 由(1)得

$$y=y(x)=\frac{1}{k}x+\psi(x).$$

证毕.

对于由下列各方程定义的函数 y,求 y' 和 y'':

【3371】 $x^2+2xy-y^2=a^2$.

提示 可用直接求导法或微分法解之. 但必须注意,在使用微分法时,$d^2x=0$.

解 用求导及微分两种方法解之.

解法 1:

等式两端分别对 x 求导数,得 $2x+2y+2xy'-2yy'=0$,故有

$$y'=\frac{y+x}{y-x}.$$

再对上式求导数,得

$$y''=\frac{(y-x)(y'+1)-(y+x)(y'-1)}{(y-x)^2}=\frac{2y-2xy'}{(y-x)^2}=\frac{2y(y-x)-2x(y+x)}{(y-x)^3}$$
$$=\frac{2(y^2-2xy-x^2)}{(y-x)^3}=-\frac{2a^2}{(y-x)^3}=\frac{2a^2}{(x-y)^3}.$$

解法 2:

等式两端分别微分,得

$$2xdx+2xdy+2ydx-2ydy=0, \tag{1}$$

故有 $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$.

对(1)式两端再微分一次,并注意 $d^2x=0$,得

$$dx^2+2dxdy-dy^2+(x-y)d^2y=0,$$

故有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+2\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y-x}=\frac{1+\frac{2(y+x)}{y-x}-\left(\frac{y+x}{y-x}\right)^2}{y-x}=\frac{2a^2}{(x-y)^3}.$$

【3372】 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$.

提示 仿 3371 题的解法.

解 解法 1:等式两端对 x 求导数,得$\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}=\dfrac{xy'-y}{x^2+y^2}$.解之即得

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

将上式再对 x 求导,得

$$y''=\frac{(x-y)(1+y')-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=\frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2}=\frac{2x(x+y)-2y(x-y)}{(x-y)^3}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

解法 2:等式两端分别微分,得$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$. 解之即得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}.$$

对 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 再微分一次,得

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+y\mathrm{d}^2y=x\mathrm{d}y^2,$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x-y}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^3}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

以下各题根据情况采用直接求导法或微分法.

【3373】 $y-\varepsilon\sin y=x\quad(0<\varepsilon<1)$.

提示 采用直接求导法较好.

解 等式两端对 x 求导数,得 $y'-\varepsilon y'\cos y=1$,故有

$$y'=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}.$$

将上式再对 x 求导数,得

$$y''=-\frac{\varepsilon y'\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^2}=-\frac{\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}.$$

【3374】 $x^y=y^x\quad(x\neq y)$.

提示 等式两端取对数后,采用直接求导法.

解 取对数得 $\quad y\ln x=x\ln y\quad$ 或 $\quad\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}\quad(x>0,\ y>0)$.

两端对 x 求导数,得$\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{y'(1-\ln y)}{y^2}$,故有

$$y'=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}.$$

将上式再对 x 求导数,得

$$y''=\frac{1}{x^4(1-\ln y)^2}\left\{x^2(1-\ln y)\left[2yy'(1-\ln x)-\frac{y^2}{x}\right]-y^2(1-\ln x)\left[2x-2x\ln y-\frac{x^2y'}{y}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{x^4(1-\ln y)^3}\left\{y^2\left[y(1-\ln x)^2-2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2\right]\right\}.$$

【3375】 $y=2x\arctan\dfrac{y}{x}$.

提示 先将原式变形为$\dfrac{y}{x}=2\arctan\dfrac{y}{x}$,其中$\dfrac{y}{x}\neq1$.采用微分法后,可得 $\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$,即$\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=0$,可得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}$.再采用直接求导法,易得$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$.

解 $\dfrac{y}{x}=2\arctan\dfrac{y}{x}$,显然$\dfrac{y}{x}\neq1$.两端微分,得

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

于是，$d\left(\frac{y}{x}\right)=0$，即$\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$，故有$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

将上式对 x 求导数，即得 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=0.$$

【3376】 证明：若 $1+xy=k(x-y)$，式中 k 为常数，则成立等式

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

证明思路 对等式 $1+xy=k(x-y)$ 两端微分，得 $xdy+ydx=k(dx-dy)$ 及

$$(x-y)(xdy+ydx)=k(x-y)(dx-dy)=(1+xy)(dx-dy).$$

命题易获证.

证 将等式 $1+xy=k(x-y)$ 两端微分，得

$$xdy+ydx=k(dx-dy),$$

故 $$(x-y)(xdy+ydx)=k(x-y)(dx-dy)=(1+xy)(dx-dy),$$

简化即得 $\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}$. 证毕.

【3377】 证明：若 $$x^2y^2+x^2+y^2-1=0,$$

则当 $xy>0$ 时成立等式 $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

证明思路 先对所给等式两端微分，得

$$x(y^2+1)dx+y(x^2+1)dy=0. \tag{1}$$

再由 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$ 可解得

$$x=\pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \tag{2}$$

由于 $xy>0$，故知 x,y 应取同号. 不论 x,y 同取正号还是同取负号，当用(2)式代入(1)式后，即获证.

证 将所给等式两端微分，得

$$2xy^2dx+2x^2ydy+2xdx+2ydy=0,$$

即 $$x(y^2+1)dx+y(x^2+1)dy=0. \tag{1}$$

由 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$ 可解得

$$x=\pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \tag{2}$$

因为 $xy>0$，故知 x,y 应同取正号或同取负号. 不论取什么符号，当用(2)式代入(1)式后，均可得

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

【3378】 证明：方程 $$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a\neq0)$$
在点 $x=0,y=0$ 的邻域中定义出两个可微函数：$y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$. 求 $y_1'(0)$ 及 $y_2'(0)$.

解 $(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$*) 即

$$y^4+(2x^2+a^2)y^2-(a^2x^2-x^4)=0.$$

解之得 $$y^2=\frac{-(2x^2+a^2)+\sqrt{8a^2x^2+a^4}}{2}$$

(根号前取正号是由于 $y^2\geqslant0$). 记

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}=\pm f(x^2).$$

不难看出(0,0)为分支点.从点(0,0)出发,有单值连续的四个分支:

$$y_1=f(x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant\delta;\qquad y_2=f(x^2),\quad -\delta\leqslant x\leqslant 0;$$

$$y_3=-f(x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant\delta\qquad y_4=-f(x^2),\quad -\delta\leqslant x\leqslant 0.$$

这几个单值分支能否组成$(-\delta,\delta)$上的可微函数,主要是看组成的函数在 $x=0$ 是否可微.为此,研究各分支在点 $x=0$ 处的单侧导数.

$$y'_{1+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{y_1(x)-y_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x^2)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2x^2}}=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{8a^2x^2+a^4-(2x^2+a^2)^2}{2x^2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{4a^2-4x^2}{2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}=1.$$

同法可得

$$y'_{2-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f(x^2)}{x}=-1,\quad y'_{3+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{-f(x^2)}{2}=-1,\quad y'_{4-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{-f(x^2)}{2}=1.$$

由上可以看出

$$y_1(x)=\begin{cases}f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ -f(x^2), & -\delta<x<0,\end{cases}\quad 及\quad y_2(x)=\begin{cases}-f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ f(x^2), & -\delta<x<0\end{cases}$$

是仅有的两个过点(0,0)的可微函数,且

$$y'_1(0)=1\quad 及\quad y'_2(0)=-1.$$

*) 此方程的图像系双纽线(图 6.28),它的极坐标方程为$r^2=a^2\cos 2\theta$. 以上作法及结论由图很容易看出.

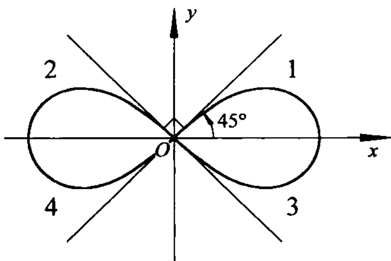


图 6.28

【3379】 设:

$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3,$$

求 y' 当 $x=0$ 和 $y=0$ 时的值.

解 本题讨论方法与 3378 题类似,但由于不能直接解出$y=f(x)$,故只能用隐函数表示.由$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3$ *) 得

$$x^4+(2y^2-3y)x^2+y^4+y^3=0.$$

解之得

$$x^2=\frac{(3y-2y^2)\pm\sqrt{9y^2-16y^3}}{2}.$$

令

$$g(y)=\frac{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}{2},$$

$$h(y)=\frac{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}{2},$$

则不难验证:在 $y=0$ 的邻域内均有 $g(y)\geqslant 0$;而仅当 $y\geqslant 0$ 时才有 $h(y)\geqslant 0$. 于是,点(0,0)为支点,且从该点

出发，有六个单值连续分支：

1. $x_1=\sqrt{g(y)}$，$0\leqslant y<\varepsilon$；它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_1(x)$.

2. $x_2=-\sqrt{g(y)}$，$0\leqslant y<\varepsilon$；它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_2(x)$.

3. $x_3=\sqrt{g(y)}$，$-\varepsilon<y\leqslant 0$；它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_3(x)$.

4. $x_4=-\sqrt{g(y)}$，$-\varepsilon<y\leqslant 0$；它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_4(x)$.

5. $x_5=\sqrt{h(y)}$，$0\leqslant y<\varepsilon$；它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_5(x)$.

6. $x_6=-\sqrt{h(y)}$，$0\leqslant y<\varepsilon$ 它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_6(x)$.

上述隐函数的存在性，易从对右端 y 的表达式求导数而导数不为零获证. 因此，只要求上述六分支在原点的单侧导数.

$$f'_{1+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{g(y)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}}=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y}{3-2y+\sqrt{9-16y}}}=0.$$

$$f'_{2-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{-\sqrt{g(y)}}=0.$$

$$f'_{3+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0}=\lim_{y\to-0}\frac{y}{g(y)}=\lim_{z\to+0}\frac{-z}{\sqrt{g(-z)}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2z^2}{\sqrt{9zx^2+16z^3}-3z-2z^2}}=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2z^2(\sqrt{9z^2+16z^3}+3z+2z^2)}{(9z^2+16z^3)-(3z+2z^2)^2}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2(\sqrt{9+16z}+3+2z)}{4-4z}}=-\sqrt{3}.$$

$$f'_{4-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_4(x)}{x}=\lim_{y\to-0}\frac{y}{-\sqrt{g(y)}}=-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}.$$

$$f'_{5+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_5(x)}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{h(y)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}}=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2(3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3})}{(3y-2y^2)^2-(9y^2-16y^3)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2(3-2y+\sqrt{9y^2-16y^3})}{4+4y}}=\sqrt{3}.$$

$$f'_{6-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_6(x)}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{-\sqrt{h(y)}}=-\sqrt{3}.$$

于是，上述六个单值连续分支可组成三个$(-\delta,\delta)$上的可微函数 $y=y_i(x)$ $(i=1,2,3)$：

$$y_1(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\geqslant 0,\\ f_2(x), & x<0\end{cases}\quad y'_1(0)=0;$$

$$y_2(x)=\begin{cases}f_3(x), & x\geqslant 0,\\ f_6(x), & x<0\end{cases}\quad y'_2(0)=-\sqrt{3};$$

$$y_3(x)=\begin{cases}f_5(x), & x\geqslant 0,\\ f_4(x), & x<0\end{cases}\quad y'_3(0)=\sqrt{3}.$$

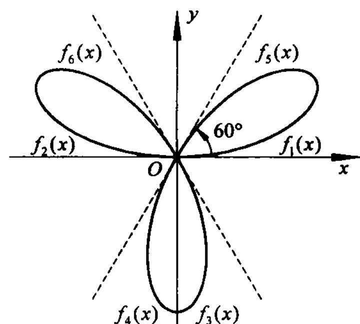


图 6.29

*） 此方程的图像为三瓣玫瑰线（图 6.29），它的极坐标方程为

$$r=a\sin 3\theta.$$

以上作法及结论，由图很容易看出.

【3380】 设 $x^2+xy+y^2=3$，求 y'，y''及 y'''.

提示 采用直接求导法.

解 等式两端对 x 求导数，得 $2x+y+xy'+2yy'=0$. 于是，

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}.$$

再对上式求导数，得

$$y''=-\frac{1}{(x+2y)^2}\{(2+y')(x+2y)-(1+2y')(2x+y)\}=-\frac{18}{(x+2y)^3};$$

$$y'''=\frac{54}{(x+2y)^4}(1+2y')=-\frac{162x}{(x+2y)^5}.$$

【3381】 设 $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$，求 y'，y'' 及 y''' 当 $x=0$，$y=1$ 时的值.

解 等式两端对 x 求导数，得

$$2x-y-xy'+4yy'+1-y'=0. \tag{1}$$

以 $x=0$，$y=1$ 代入(1)式，得 $$y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=0.$$

将(1)式再对 x 求导数，得

$$2-y'-y'-xy''+4y'^2+4yy''-y''=0. \tag{2}$$

以 $x=0$，$y=1$，$y'=0$ 代入(2)式，得 $$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{2}{3}.$$

将(2)式再对 x 求导数，得

$$-3y''-xy'''+12y'y''+4yy'''-y'''=0. \tag{3}$$

以 $x=0$，$y=1$，$y'=0$，$y''=-\dfrac{2}{3}$ 代入(3)式，得

$$y'''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{2}{3}.$$

【3382】 证明：对于二次曲线 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$，

成立等式 $$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0.$$

证明思路 原题中的二次曲线应是非退化的，即

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}\neq 0,$$

由 $\Delta\neq 0$ 保证 $y''\neq 0$.

利用直接求导法，可得 $y''=\dfrac{\Delta}{(bx+cy+e)^3}$. 由此可得

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\Delta^{-\frac{2}{3}}[(b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf],$$

它是关于 x 的二次三项式，因此，$\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0$.

证 原题中的二次曲线应是非退化的，即

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}\neq 0,$$

由 $\Delta\neq 0$ 保证 $y''\neq 0$.

等式两端对 x 求导数，得

$$2ax+2by+2bxy'+2cyy'+2d+2ey'=0. \tag{1}$$

于是， $$y'=-\frac{ax+by+d}{bx+cy+e}.$$

(1)式除以 2 后，等式两端再对 x 求导数，得

$$a+2by'+cy'^2+(bx+cy+e)y''=0.$$

于是，

$$y''=-\frac{a+2by'+cy'^2}{bx+cy+e}=-\frac{1}{(bx+cy+e)^3}\{a(bx+cy+e)^2-2b(bx+cy+e)(ax+by+d)+c(ax+by+d)^2\}$$

$$=\frac{\Delta}{(bx+cy+e)^3},$$

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\Delta^{-\frac{2}{3}}(bx+cy+e)^2=\Delta^{-\frac{2}{3}}[b^2x^2+c(cy^2+2bxy+2ey)+e^2+2bex]$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}[b^2x^2-c(ax^2+2dx+f)+2bex+e^2]=\Delta^{-\frac{2}{3}}[(b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf],$$

即 $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ 是关于 x 的二次三项式，故 $\frac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0.$

求函数 $z=z(x,y)$ 的一阶和二阶偏导数，设：

【3383】 $x^2+y^2+z^2=a^2.$

解题思路 先对等式两端微分，得

$$xdx+ydy+zdz=0. \quad (1)$$

注意 $d^2x=d^2y=0$，再对(1)式两端微分，又可得

$$dx^2+dy^2+dz^2+zd^2z=0. \quad (2)$$

由(1)得 $dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy$，故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

由(2)及(1)得 $d^2z=-\frac{z^2+x^2}{z^3}dx^2-\frac{2xy}{z^3}dxdy-\frac{z^2+y^2}{z^3}dy^2$，故有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}.$$

以下 3384 题～3387 题均可仿本题求解.

解 等式两端微分，得

$$xdx+ydy+zdz=0, \quad (1)$$

$$dx^2+dy^2+dz^2+zd^2z=0. \quad (2)$$

由(1)得 $dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy$，故有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$

由(2)得

$$d^2z=-\frac{1}{z}(dx^2+dy^2+dz^2)=-\frac{1}{z}dx^2-\frac{1}{z}dy^2-\frac{1}{z}\left(\frac{x}{z}dx+\frac{y}{z}dy\right)^2$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)dx^2-\frac{2xy}{z^3}dxdy-\frac{1}{z}\left(1+\frac{y^2}{z^2}\right)dy^2,$$

故有 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)=-\frac{z^2+x^2}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}.$$

【3384】 $z^3-3xyz=a^3.$

解 等式两端对 x 求偏导数，得

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad (1)$$

于是，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$. 同法可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$.

(1)式除以 3 后再分别对 x 及对 y 求偏导数，得

$$2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\qquad \left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-xy)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上述两式，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3 z}{(z^2-xy)^3};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}.$$

【3385】 $x+y+z=e^z$.

解 等式两次微分，得

$$dx+dy+dz=e^z dz, \tag{1}$$

故有

$$dz=\frac{1}{e^z-1}(dx+dy)=\frac{1}{x+y+z-1}(dx+dy).$$

于是，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$. 再将(1)式微分一次，得

$$d^2z=e^z d^2z+e^z dz^2,$$

故有

$$d^2z=-\frac{e^z}{e^z-1}(dz)^2=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}(dx^2+2dxdy+dy^2).$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.$$

【3386】 $z=\sqrt{x^2-y^2}\tan\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

解 设 $r=\sqrt{x^2-y^2}$，则 $\frac{z}{r}=\tan\frac{z}{r}$，$d\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{d\left(\frac{z}{r}\right)}{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}$.

从而有 $d\left(\frac{z}{r}\right)=0$，或 $rdz-zdr=0$，即

$$dz=\frac{z}{r^2}(xdx-ydy). \tag{1}$$

于是，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zx}{r^2}=\frac{xz}{x^2-y^2}$，$\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{r^2}=-\frac{yz}{x^2-y^2}$.

由(1)得

$$(x^2-y^2)dz=xzdx-yzdy. \tag{2}$$

(2)式再微分一次，得

$$\begin{aligned}(x^2-y^2)d^2z&=-(2xdx-2ydy)dz+xdxdz+zdx^2-ydydz-zdy^2\\&=-(xdx-ydy)\left[\frac{z(xdx-ydy)}{x^2-y^2}\right]+zdx^2-zdy^2\\&=\frac{z}{x^2-y^2}[-x^2dx^2+2xydxdy-y^2dy^2+(x^2-y^2)dx^2-(x^2-y^2)dy^2]\\&=\frac{z(-y^2dx^2+2xydxdy-x^2dy^2)}{x^2-y^2}\end{aligned}$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}.$$

【3387】 $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

解 等式两端对 x 求偏导数，得 $1+\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(x+y+z)}\left(-1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)$.

于是，$\frac{\partial z}{\partial x}=-1$. 利用对称性，得 $\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=-1$

显见 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

【3388】 设：

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \tag{1}$$

且 $$f(x,y,z)=xy^2z^3.$$
求 $f'_{x}(1,1,1)$，若 $z=z(x,y)$ 是由方程(1)定义的隐函数，(ⅱ) $y=y(x,z)$ 是由方程(1)定义的隐函数. 说明为什么这些导数相异.

解 (ⅰ)记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz=0$，则由方程(1)所定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $z'_x(x,y)$ 在(1,1)点的值为

$$z'_x(1,1)=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)}=-\frac{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(1,1,z)\right|_{z=1}}=-\frac{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+2-3x)\right|_{x=1}}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2+z^2-3z)\right|_{z=1}}=-1.$$

于是，

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z(x,y))]\Big|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1,1)\right|_{x=1}+\left.\frac{\partial}{\partial z}f(1,1,z)\right|_{z=1}z'_x(1,1)=1+3(-1)=-2.$$

$$(\text{ii})\ y'_x(1,1)=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)}=-\frac{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(1,y,1)\right|_{y=1}}=-1.$$

于是，

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y(x,z)z)]\Big|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1,1)\right|_{x=1}+\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y,1)\right|_{y=1}y'_x(1,1)=1+2(-1)=-1.$$

由(ⅰ)与(ⅱ)所求得的对 x 的偏导数在(1,1,1)点的值不相等，可说明如下：

方程 $F(x,y,z)=0$ 代表一个空间曲面，而 $f(x,y,z)$ 表示定义在这个曲面上的一个函数. 函数 $G(x,y)=f(x,y,z(x,y))$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxy 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxy 平面上定义的一个函数，$G'_x(x,y)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oz 轴方向的变化率的一部份. 同样地，$H(x,z)=f(x,y(x,z),z)$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxz 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxz 平面上定义的函数，$H'_x(x,z)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oy 轴方向的变化率的一部份. 一般地，原来函数在 Oy 轴和 Oz 轴方向的变化率的那两部份是不相等的.

【3389】 设 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 当 $x=1,y=-2,z=1$ 时的值.

解 等式两端微分一次，得 $2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x-\mathrm{d}z=0$.

即

$$(1-6z)\mathrm{d}z=(2x+y)\mathrm{d}x+(4y+x)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

再微分一次，得

$$(1-6z)\mathrm{d}^2z=6\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+4\mathrm{d}y^2. \tag{2}$$

以 $x=1,\ y=-2,\ z=1$ 代入(1)式，得 $\mathrm{d}z=\frac{7}{5}\mathrm{d}y$. 再以 $z=1,\ \mathrm{d}z=\frac{7}{5}\mathrm{d}y$，代入(2)式，得

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{2}{5}\mathrm{d}x^2-\frac{2}{5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{394}{125}\mathrm{d}y^2.$$

于是，当 $x=1,\ y=-2,\ z=1$ 时， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{5}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{394}{125}$.

求 $\mathrm{d}z$ 和 d^2z，设：

【3390】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解 等式两端微分一次，得 $$\frac{2x}{a^2}\mathrm{d}x+\frac{2y}{b^2}\mathrm{d}y+\frac{2z}{c^2}\mathrm{d}z=0.$$

于是，$\mathrm{d}z=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{y\mathrm{d}y}{c^2}\right)$. 再将 $\mathrm{d}z$ 微分一次，得

$$d^2z=-\frac{c^2}{z^2}\left[z\left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}\right)-\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}\right)dz\right]=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dxdy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right].$$

【3391】 $xyz=x+y+z.$

解 等式两端微分一次，得

$$yzdx+xzdy+xydz=dx+dy+dz. \tag{1}$$

于是，

$$dz=-\frac{(1-yz)dx+(1-xz)dy}{1-xy}. \tag{2}$$

对(1)式再微分一次，得

$$2zdxdy+2xdydz+2ydxdz+xyd^2z=d^2z. \tag{3}$$

以(2)式代入(3)式，化简整理得

$$d^2z=-\frac{2}{(1-xy)^2}\{y(1-yz)dx^2+[x+y-z(1+xy)dxdy+x(1-xz)dy^2\}$$

$$=-\frac{2\{y(1-yz)dx^2-2zdxdy+x(1-xz)dy^2\}}{(1-xy)^2}.$$

【3392】 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1.$

解 等式两端微分一次，得$\frac{zdx-xdz}{z^2}=\frac{dz}{z}-\frac{dy}{y}$. 于是，

$$dz=\frac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}.$$

对$(x+z)dz=zdx+\frac{z^2}{y}dy$再微分一次，得

$$(x+z)d^2z=-(dx+dz)dz+dzdx+\frac{2z}{y}dzdy-\frac{z^2}{y^2}dy^2=-dz^2+\frac{2z}{y}dydz-\frac{z^2}{y^2}dy^2=-\left(dz-\frac{z}{y}dy\right)^2$$

$$=-\frac{z^2[(ydx+zdy)-(x+z)dy]^2}{y^2(x+z)^2}=-\frac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^2}.$$

于是，

$$d^2z=-\frac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^3}.$$

【3393】 $z=x+\arctan\frac{y}{z-x}.$

解 等式两端微分一次，得 $dz=dx+\frac{1}{1+\frac{y^2}{(z-x)^2}}\cdot\frac{(z-x)dy-y(dz-dx)}{(z-x)^2}.$

化简整理，得

$$dz=dx+\frac{z-x}{(z-x)^2+y(y+1)}dy.$$

再对上式微分一次，得

$$d^2z=\frac{1}{[(z-x)^2+y(y+1)]^2}\Big\{[(z-x)^2+y(y+1)]dy(dz-dx)-(z-x)dy[2(z-x)(dz-dx)$$

$$+2ydy+dy]\Big\}.$$

将 dz 代入化简整理，即有

$$d^2z=\frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}dy^2.$$

【3394】 设 $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$，求 du.

解 等式两端微分，得 $3u^2du-3u^2(dx+dy)-6u(x+y)du+3z^2dz=0.$

于是，

$$du=\frac{u^2(dx+dy)-z^2dz}{u[u-2(x+y)]}.$$

【3395】 设 $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$，求$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导数，得

$$F'_1 \cdot \left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2 \cdot \left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0.$$

于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1+2xF'_2}{F'_1+2zF'_2}. \tag{1}$$

同法可得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1+2yF'_2}{F'_1+2zF'_2}.$$

(1)式两端对 y 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(F'_1+2zF'_2)^2}\{(F'_1+2zF'_2)[(F'_1)'_y+2x(F'_2)'_y]-(F'_1+2xF'_2)[(F'_1)'_y+2z(F'_2)'_y+2z'_y \cdot F'_2]\}$$
$$=-\frac{1}{(F'_1+2zF'_2)^2}\{2(x-z)F'_1 \cdot (F'_2)'_y+2(z-x)F'_2(F'_1)'_y-2[F'_1F'_2+x(F'_2)^2]z'_y\}$$
$$=-\frac{2(x-z)}{(F'_1+2zF'_2)^2}\{F'_1(F'_2)'_y-F'_2(F'_1)'_y\}-\frac{2F'_2(F'_1+2xF'_2)(F'_1+2yF'_2)}{(F'_1+2zF'_2)^3}.$$

现分别求 $(F'_1)'_y$ 及 $(F'_2)'_y$：
$$(F'_1)'_y=F''_{11} \cdot (1+z'_y)+F''_{12} \cdot (2y+2zz'_y),$$
$$(F'_2)'_y=F''_{21} \cdot (1+z'_y)+F''_{22} \cdot (2y+2zz'_y).$$

注意到
$$1+z'_y=\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1+2zF'_2},\quad 2y+2zz'_y=\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2},$$

即得

$$F'_1(F'_2)'_y-F'_2(F'_1)'_y$$
$$=F'_1F''_{21}\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1+2zF'_2}+F'_1F''_{22}\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2}-F'_2F''_{11}\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1+2zF'_2}-F'_2F''_{12}\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2}$$
$$=\frac{2(y-z)}{F'_1+2zF'_2}\{(F'_1)^2F''_{22}-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}\}.$$

于是，
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1+2zF'_2)^3}\{(F'_1)^2F''_{22}-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}\}-\frac{2F'_2(F'_1+2xF'_2)(F'_1+2yF'_2)}{(F'_1+2zF'_2)^3}.$$

【3396】 设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导数，得

$$F'_1+F'_2 \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_3 \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0.$$

于是，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_1-F'_3}{F'_2-F'_3}$. 同法可得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_2-F'_1}{F'_2-F'_3}.$$

【3397】 设 $F(x,x+y,x+y+z)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 等式两端分别对 x 及对 y 求偏导数，得

$$F'_1+F'_2+F'_3\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\qquad F'_2+F'_3\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(1+\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}\right),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\frac{F'_2}{F'_3}\right).$$

再将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^2}\left\{F'_3\left[F''_{11}+F''_{12}+F''_{13}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{21}+F''_{22}+F''_{23}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\right.$$
$$\left.-(F'_1+F'_2)\left[F''_{31}+F''_{32}+F''_{33}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\right\}.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 代入化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^3}\{(F'_3)^2(F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22})-2(F'_1+F'_2)F'_3(F''_{13}+F''_{23})+(F'_1+F'_2)^2F''_{33}\}.$$

【3398】 设 $F(xz,yz)=0$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 等式两端对 x 求偏导数,得 $F'_1\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2 y\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

于是,$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF'_1}{xF'_1+yF'_2}$. 将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 再对 x 求偏导数,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF'_1+xF''_2)^2}\left\{(xF'_1+yF'_2)\left[F'_1\frac{\partial z}{\partial x}+z\left(F''_{11}\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{12}y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\left[F'_1+x\left(F''_{11}\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{12}y\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(F''_{21}\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{22}y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]zF'_1\right\}.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 代入化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF'_1+yF'_2)^3}\{y^2z^2[(F'_1)^2F''_{22}-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}]-2z(F'_1)^2(xF'_1+yF'_2)\}.$$

【3399】 设:(ⅰ)$F(x+z,y+z)=0$;(ⅱ)$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$,求 d^2z.

解 (ⅰ)等式两端微分,得

$$F'_1\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)+F'_2\cdot(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)=0. \tag{1}$$

于是,$\quad \mathrm{d}z=-\frac{F'_1\mathrm{d}x+F'_2\mathrm{d}y}{F'_1+F'_2},\quad \mathrm{d}x+\mathrm{d}z=\frac{F'_2\cdot(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)}{F'_1+F'_2},\quad \mathrm{d}y+\mathrm{d}z=-\frac{F'_1\cdot(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)}{F'_1+F'_2}.$

对(1)式再求一次微分,得

$$F''_{11}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)^2+2F''_{12}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+F''_{22}\cdot(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2+(F'_1+F'_2)\mathrm{d}^2z=0.$$

于是,
$$\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{F'_1+F'_2}[F''_{11}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)^2+2F''_{12}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+F''_{22}\cdot(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2]$$
$$=-\frac{1}{(F'_1+F'_2)^3}[F''_{11}(F'_2)^2-2F'_1F'_2F''_{12}+F''_{22}(F'_1)^2](\mathrm{d}x-\mathrm{d}y^2).$$

(ⅱ)等式两端微分,得

$$F'_1\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}+F'_2\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}=0. \tag{2}$$

于是,

$$\mathrm{d}z=\frac{z(F'_1\mathrm{d}x+F'_2\mathrm{d}y)}{xF'_1+yF'_2},\quad z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z=\frac{zF'_2\cdot(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)}{xF'_1+yF'_2},\quad z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z=-\frac{zF'_1\cdot(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)}{xF'_1+yF'_2}.$$

(2)式乘以 z^2 后再微分一次,得

$$F''_{11}\frac{(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)^2}{z^2}+2F''_{12}\frac{(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)(z\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}z)}{z^2}+F''_{22}\frac{(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)^2}{z^2}-(xF'_1+yF'_2)\mathrm{d}^2z=0.$$

于是,

$$\mathrm{d}^2z=\frac{1}{z^2(xF'_1+yF'_2)}[F''_{11}\cdot(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)^2+2F''_{12}\cdot(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)+F''_{22}\cdot(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)^2]$$
$$=\frac{(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)^2}{(xF'_1+yF'_2)^3}[F''_{11}(F'_2)^2-2F'_1F'_2F''_{12}+F''_{22}(F'_1)^2].$$

【3400】 设 $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$,为由方程 $F(x,y,z)=0$ 定义的函数.证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

提示 根据隐函数求导法易证.

证 根据隐函数求导法,有 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$

三式相乘即得 $$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

【3401】 设 $x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=1$，求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{dy}{dz}$.

提示 对 z 求导数，即可获解.

解 对 z 求导数，得

$$\begin{cases}\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0,\\ x\frac{dx}{dz}+y\frac{dy}{dz}+z=0.\end{cases}$$

联立求解，得 $$\frac{dx}{dz}=\frac{y-z}{x-y},\qquad \frac{dy}{dz}=\frac{z-x}{x-y}.$$

【3402】 设 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$，$x+y+z=2$，求 $\frac{dx}{dz}$，$\frac{dy}{dz}$，$\frac{d^2x}{dz^2}$ 和 $\frac{d^2y}{dz^2}$ 当 $x=1$，$y=-1$，$z=2$ 时的值.

解 对 z 求导数，得

$$\begin{cases}2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}=z, & (1)\\ \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0, & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+2x\frac{d^2x}{dz^2}+2\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+2y\frac{d^2y}{dz^2}=1, & (3)\\ \frac{d^2x}{dz^2}+\frac{d^2y}{dz^2}=0. & (4)\end{cases}$$

将 $x=1$，$y=-1$，$z=2$ 代入(1)，(2)，解得

$$\frac{dx}{dz}=0,\qquad \frac{dy}{dz}=-1.$$

将上述结果及 x,y,z 值联同由(4)式所决定的式子 $\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{d^2y}{dz^2}$ 一起代入(3)式，即得

$$\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{1}{4},\qquad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}.$$

【3403】 设 $xu-yv=0$，$yu+xv=1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

提示 微分得 $$\begin{cases}xdu-ydv=vdy-udx,\\ ydu+xdv=-vdx-udy.\end{cases}$$

求出 du 及 dv 后，问题即可获解.

解 微分得 $$\begin{cases}xdu-ydv=vdy-udx,\\ ydu+xdv=-vdx-udy.\end{cases}$$

于是，
$$du=\frac{1}{x^2+y^2}[-(xu+yv)dx+(xv-yu)dy],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}.$$

同法可得 $$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2>0).$$

【3404】 设 $u+v=x+y$，$\frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}$ 求，du，dv，d^2u 和 d^2v.

提示 将原式改写为 $$\begin{cases}u+v=x+y,\\ y\sin u-x\sin v=0.\end{cases}$$

微分两次，并注意 $d^2x=d^2y=0$，，问题即可获解.

解 将原式改写为 $\begin{cases} u+v=x+y, \\ y\sin u=x\sin v. \end{cases}$ 微分得

$$\begin{cases} du+dv=dx+dy, & (1) \\ \sin u dy+y\cos u du=\sin v dx+x\cos v dv. & (2) \end{cases}$$

联立求解,得

$$du=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(\sin v+x\cos v)dx-(\sin u-x\cos v)dy],$$

$$dv=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[-(\sin v-y\cos u)dx+(\sin u+y\cos u)dy].$$

对(1),(2)两式再微分一次,得

$$\begin{cases} d^2u+d^2v=0, \\ y\cos u d^2u+2\cos u dy du-y\sin u du^2=x\cos v d^2v+2\cos v dx dv-x\sin v dv^2. \end{cases}$$

联立求解,得 $d^2u=-d^2v=\dfrac{1}{x\cos v+y\cos u}[(2\cos v dx-x\sin v dv)dv-(2\cos u dy-y\sin u du)du]$.

【3405】 设

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}}, \qquad e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}},$$

求 du, dv, d^2u 和 d^2v 当 $x=1$, $y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$ 时的表达式.

提示 将所给二式相除及平方相加,得

$$\begin{cases} \tan\dfrac{v}{y}=\dfrac{y}{x}, \\ e^{\frac{2u}{x}}=\dfrac{x^2+y^2}{2}. \end{cases}$$

解 将所给二式相除及平方相加,得

$$\begin{cases} \tan\dfrac{v}{y}=\dfrac{y}{x}, & (1) \\ e^{\frac{2u}{x}}=\dfrac{x^2+y^2}{2}. & (2) \end{cases}$$

微分(1)式:

$$\sec^2\frac{v}{y}\cdot\frac{ydv-vdy}{y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2}. \tag{3}$$

以 $x=1$, $y=1$, $v=\frac{\pi}{4}$ 代入(3)式,得 $dv=\frac{\pi}{4}dy-\frac{1}{2}(dx-dy)$.

微分(3)式:

$$2\sec^2\frac{v}{y}\tan\frac{v}{y}\left(\frac{ydv-vdy}{y^2}\right)^2+\sec^2\frac{v}{y}\cdot\frac{y^2d^2v-2(ydv-vdy)dy}{y^3}=\frac{-2(xdy-ydx)dx}{x^3}. \tag{4}$$

以 $x=1$, $y=1$, $v=\frac{\pi}{4}$ 及 dv 值代入(4)式,得

$$d^2v=\frac{1}{2}(dx-dy)^2.$$

微分(2)式:

$$2e^{\frac{2u}{x}}\frac{xdu-udx}{x^2}=xdx+ydy. \tag{5}$$

以 $x=1$, $y=1$, $u=0$ 代入(5)式,得 $du=\dfrac{dx+dy}{2}$.

微分(5)式:

$$4e^{\frac{2u}{x}}\left(\frac{xdu-udx}{x^2}\right)^2+2e^{\frac{2u}{x}}\frac{x^2d^2u-2(xdu-udx)dx}{x^3}=dx^2+dy^2. \tag{6}$$

以 $x=1$，$y=1$，$u=0$ 及 $\mathrm{d}u$ 代入(6)式，得 $\qquad \mathrm{d}^2u=\mathrm{d}x^2$.

【3406】 设 $x=t+t^{-1}$，$y=t^2+t^{-2}$，$z=t^3+t^{-3}$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

提示 本题除了用参数形式给出的求导法外，也可消去 t，得 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$，求出结果后再将 $x=t+t^{-1}$ 代入.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{2t-\frac{2}{t^3}}{1-\frac{1}{t^2}}=2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$； $\qquad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3t^2-\frac{3}{t^4}}{1-\frac{1}{t^2}}=3\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}+1\right)$；

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{1-\frac{1}{t^2}}=2; \qquad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3\left(2t-\frac{2}{t^3}\right)}{1-\frac{1}{t^2}}=6\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

注 本题也可消去 t 以求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$. 事实上，

$$y=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2, \qquad z=\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^2-1+\frac{1}{t^2}\right)=x(x^2-3)=x^3-3x.$$

于是， $\qquad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$， $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=3x^2-3$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2$， $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=6x$.

再将 $x=t+\dfrac{1}{t}$ 代入上述结果，即得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\left(t+\frac{1}{t}\right), \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right), \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2, \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=6\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

【3407】 在 Oxy 平面上怎样的区域内方程组

$$x=u+v, \quad y=u^2+v^2, \quad z=u^3+v^3$$

(式中参数 u 和 v 取一切可能的实数值)定义 z 为变量 x 和 y 的函数？求导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

提示 仿 3406 题，本题也可消去 u，v，得 $z=\dfrac{x}{2}(3y-x^2)$.

解 由 $u+v=x$，$u^2+v^2=y$ 解得

$$u=\frac{x\pm\sqrt{2y-x^2}}{2}, \qquad v=\frac{x\mp\sqrt{2y-x^2}}{4},$$

其中 $2y-x^2\geqslant 0$ 或 $y\geqslant\dfrac{x^2}{2}$，此即所求的区域.

再由 $x=u+v$ 及 $y=u^2+v^2$ 分别对 x 求偏导数，得

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad 0=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}.$$

联立求解得 $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{v}{v-u}$， $\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{u}{v-u} \quad (u\neq v)$.

又由 $z=u^3+v^3$ 对 x 求偏导数，即可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\frac{\partial v}{\partial x}=3u^2\frac{v}{v-u}-3v^2\frac{u}{v-u}=-3uv.$$

同法求得 $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3}{2}(u+v)$.

注 本题也可消去 u，v 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 事实上，

$x^2-y=2uv$，

$z=(u+v)(u^2-uv+v^2)=x\left(\dfrac{3}{2}y-\dfrac{x^2}{2}\right)=\dfrac{x}{2}(3y-x^2)$.

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}x^2=-3uv,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}(u+v).$

但一般说来，用参数表示的函数和消去参数后的函数，它们的定义域是不同的.

【3408】 设 $x=\cos\varphi\cos\psi,\ y=\cos\varphi\sin\psi,\ z=\sin\varphi$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

提示 本题也可消去 φ,ψ，得 $x^2+y^2+z^2=1$.

解 由 $x=\cos\varphi\cos\psi,\ y=\cos\varphi\sin\psi$ 对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases}1=-\sin\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\cos\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\\[2ex] 0=-\sin\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}.\end{cases}$$

联立求解，得$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi},\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}$. 于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\cot\varphi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\cos\psi}{\sin^2\varphi}\left(-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}\right)+\cot\varphi\sin\psi\left(-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\right)$$

$$=-\frac{\cos^2\psi+\sin^2\psi\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi}=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}.$$

注 本题也可消去 φ,ψ 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. 事实上，

$$x^2+y^2+z^2=\cos^2\varphi\cos^2\psi+\cos^2\varphi\sin^2\psi+\sin^2\varphi=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

于是，$\quad 2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{z-x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3}=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}.$$

【3409】 设 $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\quad 及\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

解题思路 本题用求二阶微分的方法，可将所有的二阶偏导数一起求出. 为此，应先求 du 及 dv，再注意 $d^2z=d^2v=-\frac{2}{u}dudv$，即可获解.

本题也可消去 u,v，由 $z=v=\arctan\frac{y}{x}$ 获解.

解 本题求二阶微分，可将所有的二阶偏导数一起求出.

$$dx=\cos v du-u\sin v dv,\qquad dy=\sin v du+u\cos v dv.$$

联立求解，得

$$du=\cos v dx+\sin v dy,\quad dv=\frac{1}{u}(-\sin v dx+\cos v dy),\quad u dv=-\sin v dx+\cos v dy.$$

再对上面最后一个式子微分一次，得

$$ud^2v+dudv=-\cos v dv dx-\sin v dv dy=-dudv,$$

于是，$\quad d^2z=d^2v=-\frac{2}{u}dudv=-\frac{2}{u^2}(\cos v dx+\sin v dy)(-\sin v dx+\cos v dy)$

$$=\frac{2}{u^2}(\sin v\cos v dx^2-\cos 2v dx dy-\sin v\cos v dy^2),$$

从而有 $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\sin v\cos v}{u^2}=\frac{\sin 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}.$

注 本题也可消去 u,v，由 $z=v=\arctan\frac{y}{x}$ 获解.

【3410】 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases}x=e^{u+v},\\ y=e^{u-v},\\ z=uv\end{cases}$（$u$ 及 v 为参数）定义，求当 $u=0$ 及 $v=0$ 时的 dz 及 d^2z .

解 $dx\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=e^{u+v}(du+dv)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=du+dv,\qquad dy\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=e^{u-v}(du-dv)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=du-dv.$

于是，当 $u=0$ 及 $v=0$ 时，

$$du=\frac{1}{2}(dx+dy),\quad dv=\frac{1}{2}(dx-dy),dz=udv+vdu=0;$$

$$d^2z=ud^2v+2dudv+vd^2u=2dudv=2\left(\frac{dx+dy}{2}\right)\left(\frac{dx-dy}{2}\right)=\frac{1}{2}(dx^2-dy^2).$$

【3411】 设 $z=x^2+y^2$，其中 $y=y(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所定义的函数，求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

解 先由 $x^2-xy+y^2=1$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$2x-y-xy'+2yy'=0,\qquad 2-2y'-xy''+2y'^2+2yy''=0.$$

于是，

$$y'=\frac{2x-y}{x-2y},\qquad y''=\frac{6(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3}=\frac{6}{(x-2y)^3}.$$

下面求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

$$\frac{dz}{dx}=2x+2yy'=2x+2y\frac{2x-y}{x-2y}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=2+2y'^2+2y''y=2y'+xy''=\frac{2(2x-y)}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}.$$

【3412】 设 $u=\frac{x+z}{y+z}$，其中 z 为由方程式 $ze^z=xe^x+ye^y$ 所定义的函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

提示 用求微分的方法较好.

解 将 $ze^z=xe^x+ye^y$ 两端微分，得

$$e^z(1+z)dz=e^x(1+x)dx+e^y(1+y)dy.$$

又因

$$\begin{aligned}du&=\frac{1}{(y+z)^2}[(y+z)dx+(y+z)dz-(x+z)dy-(x+z)dz]\\&=\frac{1}{(y+z)^2}[(y+z)dx-(x+z)dy+(y-x)dz]\\&=\frac{1}{(y+z)^2}\left[(y+z)dx-(x+z)dy+\frac{(y-x)e^x(1+x)}{e^z(1+z)}dx+\frac{(y-x)e^y(1+y)}{e^z(1+z)}dy\right],\end{aligned}$$

故得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y+z}+\frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{x-z},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{y-z}.$$

【3413】 设方程：$x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\chi(u,v)$，定义 z 为 x 和 y 的函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

提示 对 x,y 分别求偏导数即易获解.

解 对 x 求偏导数，得

$$1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{1}$$

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{3}$$

由(1)及(2)解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\tag{4}$$

其中
$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

再将(4)的结果代入(3)，即得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right).$$

同法求得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right).$$

【3414】 设：$x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$. 求反函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 的一阶和二阶偏导数.

提示 微分二次，先后求出 du, dv, d^2u 及 d^2v，可将所有的一阶及二阶偏导数一起求出.

解 微分二次，得

$$dx=\varphi_1'du+\varphi_2'dv, \tag{1}$$
$$dy=\psi_1'du+\psi_2'dv, \tag{2}$$
$$0=\varphi_{11}''du^2+2\varphi_{12}''dudv+\varphi_{22}''dv^2+\varphi_1'd^2u+\varphi_2'd^2v, \tag{3}$$
$$0=\psi_{11}''du^2+2\psi_{12}''dudv+\psi_{22}''dv^2+\psi_1'd^2u+\psi_2'd^2v. \tag{4}$$

其中右下角标号 1,2 分别代表对 u,v 的偏导数，余类推.

令 $I=\varphi_1'\psi_2'-\varphi_2'\psi_1'$，则由(1)，(2)可解得

$$du=\frac{1}{I}(\psi_1'dx-\varphi_2'dy), \tag{5}$$
$$dv=\frac{1}{I}(\varphi_1'dy-\psi_1'dx). \tag{6}$$

于是，
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\psi_2'=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

由(3)，(4)解出 d^2u, d^2v，并把(5)，(6)的结果代入，即得

$$\begin{aligned}d^2u&=\frac{1}{I}[\varphi_2'(\psi_{11}''du^2+2\psi_{12}''dudv+\psi_{22}''dv^2)-\psi_2'(\varphi_{11}''du^2+2\varphi_{12}''dudv+\varphi_{22}''dv^2)]\\&=\frac{1}{I^3}[(\varphi_2'\psi_{11}''-\psi_2'\varphi_{11}'')(\psi_2'dx-\varphi_2'dy)^2+2(\varphi_2'\psi_{12}''-\psi_2'\varphi_{12}'')(\psi_2'dx-\varphi_2'dy)(\varphi_1'dy-\psi_1'dx)\\&\quad+(\varphi_2'\psi_{22}''-\psi_2'\varphi_{22}'')(\varphi_1'dy-\psi_1'dx)^2]=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2.\end{aligned}$$

比较上式两端的系数，即得

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{1}{I^3}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\right],$$
$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{I^3}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right],$$
$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{1}{I^3}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right].$$

同法可求得 d^2v 和 $\frac{\partial^2v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2v}{\partial y^2}$.

【3415】 设(1)$x=u\cos\frac{v}{u}$，$y=u\sin\frac{v}{u}$；　(2)$x=e^u+u\sin v$，$y=e^u-u\cos v$，

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

提示 利用 3414 题的结果.

解 利用 3414 题的结果即得.

(1) $\varphi(u,v)=u\cos\frac{v}{u}$，$\psi(u,v)=u\sin\frac{v}{u}$.

于是，
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\sin\frac{v}{u},\quad \frac{\partial\psi}{\partial u}=\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u},\quad \frac{\partial\psi}{\partial v}=\cos\frac{v}{u},$$

$$I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\left(\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}\right)\cos\frac{v}{u}-\left(-\sin\frac{v}{u}\right)\left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)=1.$$

从而得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}=\cos\frac{v}{u}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\sin\frac{v}{u}$，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}+\cos\frac{v}{u}.$$

(2) $\varphi(u,v)=e^u+u\sin v$，$\psi(u,v)=e^u-u\cos v$.

于是， $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=e^u+\sin v$， $\frac{\partial\varphi}{\partial v}=u\cos v$， $\frac{\partial\psi}{\partial u}=e^u-\cos v$， $\frac{\partial\psi}{\partial v}=u\sin v$，

$$I=(e^u+\sin v)u\sin v-(e^u-\cos v)u\cos v=u[e^u(\sin v-\cos v)+1].$$

从而得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{e^u-\cos v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u+\sin v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

【3416】 函数 $u=u(x)$ 由方程组 $\begin{cases}u=f(x,y,z),\\ g(x,y,z)=0,\\ h(x,y,z)=0\end{cases}$ 定义. 求 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d^2u}{dx^2}$.

解 微分得

$$du=f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)f, \tag{1}$$

$$0=g'_x dx+g'_y dy+g'_z dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)g, \tag{2}$$

$$0=h'_x dx+h'_y dy+h'_z dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)h. \tag{3}$$

令 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}=I_1$，$\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}=I_2$，$\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}=I_3$，则由(2)，(3)可解得

$$dy=\frac{I_2}{I_1}dx,\qquad dz=\frac{I_3}{I_1}dx.$$

将 dy，dz 代入(1)，得

$$du=f'_x dx+f'_y\frac{I_2}{I_1}dx+f'_z\frac{I_3}{I_1}dx=\frac{1}{I_1}(I_1f'_x+I_2f'_y+I_3f'_z)dx=\frac{I}{I_1}dx,$$

其中 $I=\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$. 于是，$\frac{du}{dx}=\frac{I}{I_1}$.

对(1)，(2)，(3)再求一次微分，得

$$d^2u=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f+f'_y d^2y+f'_z d^2z, \tag{4}$$

$$0=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2g+g'_y d^2y+g'_z d^2z, \tag{5}$$

$$0=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2h+h'_y d^2y+h'_z d^2z, \tag{6}$$

于是，

$$d^2y=\frac{1}{I_1}\left[g'_z\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2h-h'_z\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2g\right]$$

$$d^2z=\frac{1}{I_1}\left[h'_y\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2g-g'_y\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2h\right].$$

令 $\frac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}=I_4$，$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}=I_5$，并将 d^2y 及 d^2z 代入(4)，即得

$$d^2u=\frac{1}{I_1}\left[I_1\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f+I_4\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2g+I_5\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial a}\right)^2h\right],$$

再以 $dy=\frac{I_2}{I_1}dx$ 及 $dz=\frac{I_3}{I_1}dx$ 代入上式，即得

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left[I_1\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+I_4\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial a}\right)^2 g+I_5\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial a}\right)^2 h\right].$$

【3417】 函数 $u=u(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases}u=f(x,y,z,t),\\ g(y,z,t)=0,\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 定义. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 微分得

$$du=f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz+f'_t dt, \tag{1}$$

$$0=g'_y dy+g'_z dz+g'_t dt, \tag{2}$$

$$0=h'_z dz+h'_t dt. \tag{3}$$

令 $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$,则由(2),(3)可解得

$$dz=\frac{1}{I_1}(-g'_y h'_t)dy,\quad dt=\frac{1}{I_1}(g'_y h'_z)dy.$$

将 dz 及 dt 代入(1)式,得 $\quad du=f'_x dx+f'_y dy-\frac{g'_y}{I_1}(f'_z h'_t-f'_t h'_z)dy.$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=f'_y+g'_y\frac{I_2}{I_1},$$

其中 $\quad I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}$.

【3418】 设 $x=f(u,v,w)$, $y=g(u,v,w)$, $z=h(u,v,w)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

提示 用求微分的方法较好.

解 微分得 $\quad dx=f'_u du+f'_v dv+f'_w dw,\quad dy=g'_u du+g'_v dv+g'_w dw,\quad dz=h'_u du+h'_v dv+h'_w dw.$

令 $I=\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$,则有

$$du=\frac{1}{I}\begin{vmatrix}dx & f'_v & f'_w\\ dy & g'_v & g'_w\\ dz & h'_v & h'_w\end{vmatrix}=\frac{I_1}{I}dx+\frac{I_2}{I}dy+\frac{I_3}{I}dz,$$

其中 $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}$, $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}$. 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{I_1}{I},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_3}{I}.$$

【3419】 设函数 $z=z(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases}f(x,y,z,t)=0,\\ g(x,y,z,t)=0,\end{cases}$$

式中 t 为参变量. 求 dz.

解 微分得 $\quad f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz+f'_t dt=0,\quad g'_x dx+g'_y dy+g'_z dz+g'_t dt=0.$

把 dz, dt 看作未知量,其他为系数. 解之得

$$dz=\frac{1}{I_3}[f'_t(g'_x dx+g'_y dy)-g'_t(f'_x dx+f'_y dy)]=\frac{1}{I_3}[(f'_t g'_x-g'_t f'_x)dx+(f'_t g'_y-g'_t f'_y)dy]$$

$$=-\frac{I_1 dx+I_2 dy}{I_3},$$

其中 $\quad I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)},\quad I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)},\quad I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}.$

【3420】 设 $u=f(z)$,其中 z 为由方程式 $z=x+y\varphi(z)$ 定义的隐函数. 证明拉格朗日公式:

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

提示 对 $n=1$ 证明公式并运用数学归纳法.

证 $dz=dx+\varphi(z)dy+y\varphi'(z)dz,$

于是，$\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1-y\varphi'(z)},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}=\varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}.$

从而得 $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial x},$

即当 $n=1$ 时，拉格朗日公式成立.

对于任意可微函数 $g(z)$，有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[g(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=g'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+g(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+g(z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+g(z)\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi'(z)g(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(z)g(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)g(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

令 $g(z)=\varphi(z)$，得 $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^2(z)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right],$

即当 $n=2$ 时，拉格朗日公式也成立. 设当 $n=k$ 时，公式成立，

即有 $$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

于是，

$$\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}$$
$$=\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

即当 $n=k+1$ 时，拉格朗日公式也成立. 于是，对于一切正整数 n，均有

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi^n(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

【3421】 证明：由方程

$$\Phi(x-az,y-bz)=0 \tag{1}$$

（其中 $\Phi(u,v)$ 是变量 u,v 的任意可微函数，a 和 b 为常数）定义的函数 $z=z(x,y)$ 为方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

的解. 说明曲面(1)的几何性质.

解 由于 $\qquad \Phi_1'\cdot\left(1-a\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)-b\Phi_2'\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad -\Phi_1'a\dfrac{\partial z}{\partial y}+\Phi_2'\cdot\left(1-b\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$

故有 $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\Phi_1'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'},\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\Phi_2'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'}.$

将上面二个等式依次乘以 a,b，然后相加，即得

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

这就说明 $z=z(x,y)$ 为方程 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ 的解.

等式 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}-1=0$ 表示曲面(1)上任一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_1},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_1},-1\right\}$ 皆与向量 $\boldsymbol{r}_1=\{a,b,1\}$ 垂直. 过点 P_1 作平行于 $\boldsymbol{r}_1$ 的直线 l_1：

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{1}.$$

易知 l_1 上的点皆在曲面(1)上. 于是，曲面(1)是母线平行于 $\boldsymbol{r}_1$ 的柱面.

【3422】 证明：由方程

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \tag{2}$$

(其中 $\Phi(u,v)$ 是变量 u 和 v 的任意可微函数)定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$

说明曲面(2)的几何性质.

解 由于 $\Phi_1'\dfrac{z-z_0-(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}-\Phi_2'\dfrac{(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}=0,\quad -\Phi_1'\dfrac{(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}+\Phi_2'\dfrac{z-z_0-(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}=0,$

故有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(z-z_0)\Phi_1'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(z-z_0)\Phi_2'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $x-x_0$ 及 $y-y_0$,然后相加,即得

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0,$$

本题获证.

等式 $(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}-(z-z_0)=0$ 表示曲面(2)在其上任一点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_2},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_2},-1\right\}$ 与向量 $\boldsymbol{r}_2=\{x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0\}$ 垂直. 作过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线 l_2:

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{y_2-y_0}=\frac{z-z_0}{z_2-z_0}.$$

易知 l_2 上的任一点皆在曲面(2)上. 于是,曲面(2)是顶点在 P_0 的锥面.

【3423】 证明:由方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \tag{3}$$

[其中 $\Phi(u)$ 是变量 u 的任意可微函数,a,b 和 c 为常数]定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

说明曲面(3)的几何性质.

解 由于 $$a+c\frac{\partial z}{\partial x}=\Phi'\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad b+c\frac{\partial z}{\partial y}=\Phi'\cdot\left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

故有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\Phi'-a}{c-2z\Phi'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\Phi'-b}{c-2z\Phi'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $(cy-bz)$ 及 $(az-cx)$,然后相加,即得

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(2x\Phi'-a)(cy-bz)+(2y\Phi'-b)(az-cx)}{c-2z\Phi'}$$
$$=\frac{(c-2z\Phi')(bx-ay)}{c-2z\Phi'}=bx-ay,$$

本题获证.

设 $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 是曲面(3)上任意一点,并记 $\boldsymbol{r}_3=\{a,b,c\}$. 由于曲面(3)在点 P_3 的法向量为 $\boldsymbol{n}_3=\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_3},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_3},-1\right\}$,故由方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}-(bx-ay)=0$$

知 $\boldsymbol{n}_3\perp(\boldsymbol{P}_3\times\boldsymbol{r}_3)$,其中 $\boldsymbol{P}_3=\{x_3,y_3,z_3\}$.

设由原点到 P_3 的距离为 d,即 $x_3^2+y_3^2+z_3^2=\mathrm{d}^2$. 考虑平面

$$\Pi: ax+by+cz=d$$

和过点 P_3 的球面 $$S: x^2+y^2+z^2=d^2,$$

并设平面 Π 与球面 S 的交线为 C,则

1° 由点 P_3 在曲面(3)上可知

$$ax_3+by_3+cz_3=\Phi(x_3^2+y_3^2+z_3^2),$$

即 $d=\Phi(d^2)$. 这表明曲线 C 上的点的坐标皆满足方程(3),即曲线 C 位于曲面(3)上.

2° 由 Π 为平面,S 为球面知交线 C 为一圆周曲线.

3° 圆 C 的圆心 Q 即为由原点到平面 Π 的垂足,故点 Q 位于过原点且与平面 Π 垂直的直线 l 上.

综上所述,可见曲面(3)是以直线 l: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 为旋转轴的旋转曲面.

【3424】 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 给出. 证明:

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

证 由于 $2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$, 故有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$.

同法可求得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-y^2+z^2-zf'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-yf'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

于是,
$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy(y^2+z^2-x^2)+2xy(x^2-y^2+z^2-zf')}{y(2z-f')}$$
$$=\frac{2xyz(2z-f')}{y(2z-f')}=2xz,$$

本题获证.

【3425】 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$ 给出. 证明: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

证 由于 $F'_1\cdot\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\left(\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}\right)=0$, $F'_1\cdot\left(\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}\right)+F'_2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$,

故有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1}{x(xF'_1+yF'_2)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xzF'_1-xy^2F'_2}{y(xF'_1+yF'_2)}.$$

于是,
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1+xzF'_1-xy^2F'_2}{xF'_1+yF'_2}=\frac{(z-xy)(xF'_1+yF'_2)}{xF'_1+yF'_2}=z-xy,$$

本题获证.

【3426】 证明:由方程组
$$\begin{cases}x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha),\\-x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha)\end{cases}$$

[其中 $\alpha=\alpha(x,y)$ 为参变量,$f(\alpha)$ 为任意可微函数]定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2.$$

证 由 $x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha)$ 两端对 x 求偏导数,得

$$\cos\alpha-x\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}+y\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

由于 $-x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha)$,代入上式,即得

$$\cos\alpha+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-z\cos\alpha \tag{1}$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-z\sin\alpha. \tag{2}$$

将(1),(2)两式依次平方,然后相加,即得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2,$$

本题获证.

【3427】 证明:由方程组
$$\begin{cases}z=\alpha x+\dfrac{y}{\alpha}+f(\alpha),\\ 0=x-\dfrac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha)\end{cases}$$
给出的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

证 由于
$$\mathrm{d}z=\alpha\mathrm{d}x+\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}y+\left[x-\frac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha=\alpha\mathrm{d}x+\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}y,$$
故有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\alpha$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\alpha}$. 于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,$$
本题获证.

【3428】 证明:由方程组
$$\begin{cases}[z-f(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2),\\ [z-f(\alpha)]f'(\alpha)=\alpha x^2\end{cases}$$
定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

证 $2[z-f(\alpha)][\mathrm{d}z-f'(\alpha)\mathrm{d}\alpha]=(y^2-\alpha^2)2x\mathrm{d}x+x^2(2y\mathrm{d}y-2\alpha\mathrm{d}\alpha)$.

于是，$[z-f(\alpha)]\mathrm{d}z=x(y^2-\alpha^2)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y-\{\alpha x^2-[z-f(\alpha)]f'(\alpha)\}\mathrm{d}\alpha=x(y^2-\alpha^2)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$,
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x(y^2-\alpha^2)}{z-f(\alpha)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2y}{z-f(\alpha)}.$$
从而得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3y(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy\dfrac{x^2(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy$,

本题获证.

【3429】 证明:由方程组
$$\begin{cases}z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\\ 0=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)\end{cases}$$
给出的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

证 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\alpha+x\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}+y\varphi'(\alpha)\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}+\psi'(\alpha)\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}=\alpha+[x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)]\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}=\alpha$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}$.

又 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}+\varphi(\alpha)+y\varphi'(\alpha)\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}+\psi'(\alpha)\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}=\varphi(\alpha)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi'(\alpha)\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\varphi'(\alpha)\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$.

而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\varphi'(\alpha)-\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2=\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\left[\varphi'(\alpha)\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}-\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\right]$,

由于 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$,故 $\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}=\varphi'(\alpha)\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$. 于是,
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0^{*)},$$
本题获证.

*) 此题也可由原方程组第二式两端分别对 x 和 y 求偏导数而获得.

【3430】 证明:由方程 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ 定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足方程
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

证 记 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=p$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=q$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$.

将所给方程两端分别对 x 和对 y 逐次求偏导数，得

$$\varphi(z)+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]p=0,\quad [x\varphi'(z)+\psi'(z)]q=1;$$

$$2\varphi'(z)p+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]p^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]r=0,\tag{1}$$

$$\varphi'(z)q+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]pq+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]s=0,\tag{2}$$

$$[x\varphi''(z)+\psi''(z)]q^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]t=0.\tag{3}$$

将(1),(2),(3)三式依次乘以 q^2，$(-2pq)$ 及 p^2，然后相加，并注意到 $x\varphi'(z)+\psi'(z)\neq 0$（因为 $[x\varphi'(z)+\psi'(z)]q=1$），即得

$$rq^2-2pqs+tp^2=0,$$

此即所要证明的.

§4. 变 量 代 换

1° **在含有导数的表达式中的变量代换.** 设在微分表达式

$$A=\Phi(x,y,y'_x,y''_{xx},\cdots)$$

中需要把 x,y 换为新的变量 t（自变量）及 u（函数），这些变量与归变量 x,y 之间的关系由方程

$$x=f(t,u),\qquad y=g(t,u)\tag{1}$$

给出.

把方程式(1)微分，便有

$$y'_x=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial t}+\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_t}.$$

类似地可表示出高阶导数 y''_{xx}，…结果得

$$A=\Phi_1(t,u,u'_t,u''_{tt},\cdots).$$

2° **在含有偏导数的表达式中自变量的代换.** 若在表达式

$$B=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\cdots\right)$$

中令

$$x=f(u,v),\qquad y=g(u,v),\tag{2}$$

其中 u 和 v 为新的自变量，则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，…由下列方程确定：

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},\quad \cdots$$

3° **在含有偏导数的表达式中自变量和函数的代换.** 在更一般的情况下，设有方程

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w),\tag{3}$$

其中 u,v 为新的自变量，$w=w(u,v)$ 为新的函数，则对于偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，…得到这样的方程：

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},\quad \cdots$$

在某些情况下，使用全微分法进行变量代换是方便的.

【3431】 把 y 看作新的自变量，变换方程

$$y'y'''-3y''^2=x.$$

提示 先求出：$y'=\frac{1}{x'}$，$y''=-\frac{x''}{(x')^3}$ 及 $y'''=\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}$，其中 $x=x(y)$ 为 $y=y(x)$ 的反函数，再将所

求得的 y'、y''及 y'''代入所给方程，即可获解.

解 函数 $y=y(x)$的各阶导数 $y',y'',y''',\cdots$与其反函数 $x=x(y)$的各阶导函数 $x',x'',x''',\cdots$之间有下述关系.

$$y'=\frac{1}{x'} \qquad \text{公式 1}$$

$$y''=(y')'=\left(\frac{1}{x'}\right)'_y\cdot y'_x=-\frac{x''}{x'^2}\frac{1}{x'}=-\frac{x''}{(x')^3} \qquad \text{公式 2}$$

$$y'''=(y'')'=-\left[\frac{x''}{(x')^3}\right]'_y y'_x=\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}. \qquad \text{公式 3}$$

以公式 1、2、3 代入所给方程，化简整理即得 $x'''+x(x')^5=0$.

【3432】 用同样的方法变换方程

$$(y')^2y^{(4)}-10y'y''y'''+15(y'')^3=0.$$

提示 利用 3431 题的结果，可得

$$y^{(4)}=(y''')'=\frac{10x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-15(x'')^3}{(x')^7}.$$

将 y'、y''、y'''及 $y^{(4)}$代入所给方程，即可获解.

解 解法 1：

由公式 3 可得

$$y^{(4)}=(y''')'=\left[\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}\right]'_y y'_x=\frac{6x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-x'x''x'''-5[(3x'')^2-x'x''']x''}{(x')^6}\frac{1}{x'}$$

$$=\frac{10x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-15(x'')^3}{(x')^7}. \qquad \text{公式 4}$$

以公式 1、2、3、4 代入所给方程，化简整理得 $x^{(4)}=0$.

解法 2：

由公式 4 可看出 $x^{(4)}=\dfrac{10y'y''y'''-(y')^2y^{(4)}-15(y'')^3}{(y')^7}$.

因此，所给方程可改写为 $-x^{(4)}(y')^7=0$. 由于 $y'\neq0$，故得 $x^{(4)}=0$.

【3433】 把 x 看作函数，把 $t=xy$ 看作自变量，变换方程

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0.$$

解 将 $t=t(x)$看作 x 的函数. 对 $t=xy$ 两端分别求 x 的一阶、二阶导数，得

$$\frac{dt}{dx}=y+xy', \qquad (1)$$

$$\frac{d^2t}{dx^2}=2y'+xy''. \qquad (2)$$

由于$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\frac{dt}{dx}}$，故由(1)式得

$$y'=\frac{1-y\dfrac{dx}{dt}}{x\dfrac{dx}{dt}}. \qquad (3)$$

由公式 2 及(2)式可得

$$-\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}=2y'+xy'',\quad y''=-\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}-\frac{2y'}{x}. \qquad (4)$$

将(4)式代入所给方程，得 $-\dfrac{d^2x}{dt^2}+xy\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3=0$ 或 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-t\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3=0.$

引入新变量,变换下列常微分方程:

【3434】 $x^2y''+xy'+y=0$,若 $x=e^t$.

解题思路 当函数 y 不变,只作自变量的代换 $x=x(t)$ 时,注意到对 $\frac{dt}{dx}$ 及 $\frac{d^2t}{dx^2}$ 运用 3431 题中公式 1 及 2 的结果,可得

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{及} \quad y''=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

将 $x=e^t$ 代入上面两式,再将所求得的 y' 及 y'' 代入所给方程,即可获解.

解 当函数 y 不变,只作自变量的代换 $x=x(t)$ 时,注意到对 $\frac{dt}{dx}$,$\frac{d^2t}{dx^2}$ 运用公式 1 及 2,即得

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \text{公式 5}$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}. \qquad \text{公式 6}$$

在本题中,$x=e^t$,故有

$$\frac{dx}{dt}=e^t=x, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=e^t=x,$$

从而有

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{x}, \quad y''=\frac{x\frac{d^2y}{dt^2}-x\frac{dy}{dt}}{x^3}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

将 y' 及 y'' 代入所给方程,即得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

【3435】 $y'''=\frac{6y}{x^3}$,若 $t=\ln|x|$.

提示 应用复合函数求导公式,可得 y',y'',y''',将 y''' 代入所给方程,即得 $\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0$.

解 应用复合函数求导公式,有

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(x\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dt}\right)=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}}{x^2},$$

$$y'''=\frac{1}{x^4}\left[x^2\left(\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dt}{dx}-2x\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right).$$

将 y''' 代入所给方程,即得

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0.$$

【3436】 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$,若 $x=\cos t$.

提示 注意到 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$,$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$,运用 3434 题关于 y' 及 y'' 的公式 5 及 6,求得 y' 及 y''(t 为自变量)后连同 x 代入所给方程,即可获解.

解 注意到 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$,$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$,用公式 5 及 6,就有

$$y'=-\frac{\frac{dy}{dt}}{\sin t}, \qquad y''=\frac{-\sin t\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\frac{dy}{dt}}{-\sin^3 t}.$$

将 y',y''及 x 代入所给方程，即得 $\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$

【3437】 $y''+y'\text{th}x+\frac{m^2}{\text{ch}^2x}y=0$，若 $x=\ln\tan\frac{t}{2}$.

提示 仿 3436 题的解法，并注意 $\text{ch}x=\frac{1}{\sin t}$，$\text{th}x=-\cos t$.

解 仍用公式 5 及 6，注意到 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sin t}$，$\quad\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\cos t}{\sin^2t}$，$\quad\text{ch}x=\frac{1}{\sin t}$，$\quad\text{th}x=-\cos t$，

就有
$$y'=\sin t\frac{dy}{dt},\qquad y''=\sin^2t\frac{d^2y}{dt^2}+\sin t\cos t\frac{dy}{dt}.$$

将 y',y''，$\text{ch}x$ 及 $\text{th}x$ 代入所给方程，即得 $\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0.$

【3438】 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$，令 $y=ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$.

提示 注意 $u=u(x)$，因而可知 $y=y(x)$，将所求得的 y'及 y''代入所给方程，即可获解.

解 $y'=\frac{du}{dx}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-\frac{1}{2}up(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$，

$$y''=\frac{d^2u}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-p(x)\frac{du}{dx}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}+\frac{1}{4}up^2(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-\frac{1}{2}up'(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}.$$

将 y',y''代入所给方程，化简整理即得
$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0.$$

【3439】 $x^4y''+xyy'-2y^2=0$，若 $x=e^t$，$y=ue^{2t}$，其中 $u=u(t)$.

提示 由参数方程所确定的函数的求导法，求得 y'及 y''，将 y',y''及 x,y 代入所给方程，即可获解. 以下 3440 题～3443 题均可仿本题求解.

解 $y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{2t}(2u+u')}{e^t}=e^t(2u+u')$，$\qquad y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(u''+3u'+2u)}{e^t}=u''+3u'+2u$，

其中 u'及 u''表示 u 对 t 的一阶及二阶导数，以下各题类似，不再说明.

将 y',y''及 x,y 代入所给方程，化简整理即得
$$u''+(u+3)u'+2u=0.$$

【3440】 $(1+x^2)^2y''=y$，若 $x=\tan t$，$y=\frac{u}{\cos t}$，其中 $u=u(t)$.

解 $y'=\frac{\frac{u'\cos t+u\sin t}{\cos^2t}}{\frac{1}{\cos^2t}}=u'\cos t+u\sin t$，$\qquad y''=\frac{u''\cos t+u\cos t}{\frac{1}{\cos^2t}}=(u''+u)\cos^3t.$

将 y',y''及 x,y 代入所给方程，化简整理即得 $u''=0$.

【3441】 $(1-x^2)^2y''=-y$，若 $x=\text{th}t$，$y=\frac{u}{\text{ch}t}$，其中 $u=u(t)$.

解 $y'=\frac{\frac{u'\text{ch}t-u\text{sh}t}{\text{ch}^2t}}{\frac{1}{\text{ch}^2t}}=u'\text{ch}t-u\text{sh}t$，$\qquad y''=\frac{u''\text{ch}t-u\text{ch}t}{\frac{1}{\text{ch}^2t}}=(u''-u)\text{ch}^3t.$

将 y''及 x,y 代入所给方程，化简整理即得 $\quad u''=0$.

【3442】 $y''+(x+y)(1+y')^3=0$，若 $x=u+t$，$y=u-t$，其中 $u=u(t)$.

解 $y'=\frac{u'-1}{u'+1}$，$\qquad y''=\frac{\frac{u''(u'+1)-u''(u'-1)}{(u'+1)^2}}{u'+1}=\frac{2u''}{(u'+1)^3}.$

将 y'，y'' 及 x，y 代入所给方程，化简整理即得 $u''+8u(u')^3=0$.

【3443】 $y'''-x^3y''+xy'-y=0$，若 $x=\dfrac{1}{t}$，$y=\dfrac{u}{t}$，其中 $u=u(t)$.

解 $y'=\dfrac{\dfrac{u't-u}{t^2}}{-\dfrac{1}{t^2}}=u-tu'$，$\quad y''=\dfrac{-tu''}{-\dfrac{1}{t^2}}=t^3u''$，$\quad y'''=\dfrac{3t^2u''+t^3u'''}{-\dfrac{1}{t^2}}=-t^4(3u''+tu''')$.

将 y'，y''，y''' 及 x，y 代入所给方程，化简整理即得 $t^5u'''+(3t^4+1)u''+u'=0$.

【3444】 令 $u=\dfrac{y}{x-b}$，$t=\ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|$，并把 u 看作变量 t 的函数，以变换斯托克斯方程

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

解 由于 $t=\ln|x-a|-\ln|x-b|$，故有

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{(x-a)(x-b)}\quad\text{或}\quad\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{(x-a)(x-b)}{a-b}\tag{1}$$

又因 $u=\dfrac{y}{x-b}$，故 $y=u(x-b)$，

$$y'=(x-b)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\frac{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}(x-b)+u=\frac{(a-b)u'}{x-a}+u,\tag{2}$$

$$y''=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\left[\frac{(a-b)u''}{x-a}+u'-\frac{(a-b)u'}{(x-a)^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]\cdot\frac{a-b}{(x-a)(x-b)}=\frac{(a-b)^2(u''-u')}{(x-a)^2(x-b)}.\tag{3}$$

将(3)式代入所给方程，即得 $\quad u''-u'=\dfrac{Au}{(a-b)^2}\quad(a\neq b)$.

【3445】 证明：若方程 $\quad\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=0$，

由代换 $x=\varphi(\xi)$ 变换为方程 $\quad\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\xi^2}+P(\xi)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}+Q(\xi)y=0$，

则 $\quad[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}$.

证 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}=\varphi'(\xi)$，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\xi^2}=\varphi''(\xi)$. 由公式 5 及 6，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}}{\varphi'(\xi)},\quad\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{[\varphi'(\xi)]^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\xi^2}-\frac{\varphi''(\xi)}{[\varphi'(\xi)]^3}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}.$$

代入原方程，两端同乘 $[\varphi'(\xi)]^2$，即得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\xi^2}+\left\{p[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)-\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)}\right\}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}+q[\varphi(\xi)][\varphi'(\xi)]^2y=0.$$

于是，$\quad P(\xi)=p\varphi'-\dfrac{\varphi''}{\varphi'}$，$\quad Q(\xi)=q\cdot(\varphi')^2$；$\quad Q'(\xi)=q'\cdot(\varphi')^3+2q\varphi'\varphi''$.

从而得知

$$[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}=\left\{2\left(p\varphi'-\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)q\cdot(\varphi')^2+q'\cdot(\varphi')^3+2q\varphi'\varphi''\right\}[q\cdot(\varphi')^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\{2pq\cdot(\varphi')^3+q'\cdot(\varphi')^3\}q^{-\frac{3}{2}}\cdot(\varphi')^{-3}=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}},$$

本题获证.

【3446】 在方程 $\Phi(y,y',y'')=0$（其中 Φ 为变量 y，y'，y'' 的齐次函数）中令 $y=\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}u\mathrm{d}x}$.

解 $y'=u\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}u\mathrm{d}x}$，$\quad y''=(u'+u^2)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}u\mathrm{d}x}$.

代入方程 $\Phi(y,y',y'')=0$，由于 Φ 关于 y,y',y'' 是齐次的，因此，各项含有的因式 $e^{\int_{x_0}^{x}u\mathrm{d}x}$ 均可约去，最后得

$$\Phi(1,u,u'+u^2)=0.$$

【3447】 在方程 $F(x^2y'',xy',y)=0$（其中 F 为其自变量的齐次函数）中令 $u=x\dfrac{y'}{y}$.

解 $y'=\dfrac{yu}{x}$，$y''=\dfrac{x(u'y+y'u)-yu}{x^2}=\dfrac{y[xu'+(u^2-u)]}{x^2}$. 于是，

$$xy'=uy,\qquad x^2y''=y[xu'+(u^2-u)].$$

由于 F 为其自变量的齐次函数，因此，各项含有的因子 y 均可约去，最后得

$$F(xu'+u^2-u,u,1)=0.$$

【3448】 证明：经射影变换 $x=\dfrac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a\xi+b\eta+c}$，$\quad y=\dfrac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a\xi+b\eta+c}$，

方程

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$$

不变其形状.

证 本题似有误. 事实上，作压缩变换

$$x=\xi,\qquad y=a\eta\quad(a\neq0)$$

（它是射影变换的特例），则原方程变为 $a\eta'''(1+a\eta'^2)-3a^3\eta'\eta''^2=0$，显然形式已改变.

【3449】 证明：施瓦茨函数 $\quad S[x(t)]=\dfrac{x'''(t)}{x'(t)}-\dfrac{3}{2}\left[\dfrac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$

的值在分式线性变换 $\quad y=\dfrac{ax(t)+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq0)$，

下保持不变.

证明思路 注意到已知的分式线形变换

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

可由下述三个变换构成： $\quad y=\alpha+\beta y_2,\quad y_2=\dfrac{1}{y_1},\quad y_1=cx+d.$

因此，只要证明在上述各种变换下 S 的值不变即可，即只要证明：

$$S[y_1(t)]=S[x(t)],S[y_2(t)]=S[y_1(t)],S[y(t)]=S[y_2(t)].$$

证 已知的变换 $\quad y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a\left(x+\dfrac{d}{c}\right)+\left(b-\dfrac{ad}{c}\right)}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$

可由下述变换所构成： $\quad y=\alpha+\beta y_2,\quad y_2=\dfrac{1}{y_1},\quad y_1=cx+d.$

只要证明在上述各种变换下 S 的值不变即可.

1° 令 $y_1=cx+d$，则 $y_1'(t)=cx'(t)$，$y_1''(t)=cx''(t)$，$y_1'''(t)=cx'''(t)$. 于是，

$$S[y_1(t)]=\frac{y_1'''(t)}{y_1'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{y_1''(t)}{y_1'(t)}\right]^2=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2=S[x(t)];$$

2° 令 $y_2=\dfrac{1}{y_1}$，则 $y_2'(t)=-\dfrac{y_1'}{y_1^2}$，$y_2''(t)=-\dfrac{y_1y_1''-2y_1'^2}{y_1^3}$，$y_2'''(t)=-\dfrac{y_1'''y_1^2-6y_1''y_1'y_1+6y_1'^3}{y_1^4}$. 于是，

$$S[y_2(t)]=\frac{y_2'''(t)}{y_2'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{y_2''(t)}{y_2'(t)}\right]^2=\frac{\dfrac{y_1'''y_1^2-6y_1''y_1'y_1+6y_1'^3}{y_1^4}}{\dfrac{y_1'}{y_1^2}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{y_1y_1''-2y_1'^2}{y_1^3}}{\dfrac{y_1'}{y_1^2}}\right)^2$$

$$=\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{6y_1''}{y_1}+\frac{6y_1'^2}{y_1^2}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}-\frac{2y_1'}{y_1}\right)^2=\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2=S[y_1(t)]=S[x(t)];$$

3° 由 1°及 2°即知

$$S[y(t)]=S[\alpha+\beta y_2]=\frac{(\alpha+\beta y_2)'''}{(\alpha+\beta y_2)'}-\frac{3}{2}\left\{\frac{(\alpha+\beta y_2)''}{(\alpha+\beta y_2)'}\right\}^2=\frac{y_2'''}{y_2'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_2''}{y_2'}\right)^2=S[y_2(t)]=S[x(t)].$$

证毕.

令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,写出下列方程在极坐标 r,φ 下的形式:

【3450】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

提示 仿 3439 题,先求得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\varphi\dfrac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\dfrac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}$,将$\dfrac{dy}{dx}$及 x,y 代入所给方程,即可获解.

解 当 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ 时,

$$\frac{dx}{d\varphi}=\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi,\quad \frac{dy}{d\varphi}=\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}=\cos\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\cos\varphi,\quad \frac{d^2y}{d\varphi^2}=\sin\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}+2\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi.$$

由公式 5 及 6,即得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dx}{d\varphi}-r\sin\varphi},\qquad \text{公式 7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{d\varphi^2}\frac{dx}{d\varphi}-\frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^3}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi\right)^3}.\qquad \text{公式 8}$$

将公式 7 及 x,y 代入所给方程,化简整理即得$\dfrac{dr}{d\varphi}=r$ 或 $r'=r$.

以下各题,$\dfrac{dr}{d\varphi}$ 及 $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}$ 均简记为 r' 及 r''.

【3451】 $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

提示 先利用 3450 题中关于 y'的结果,求出 $xy'-y$ 及 $1+y'^2$. 然后将它们及 x,y 代入所给方程,即可获解.

解 $xy'-y=r\cos\varphi\dfrac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}-r\sin\varphi=\dfrac{r(r'\sin\varphi\cos\varphi+r\cos^2\varphi-r'\sin\varphi\cos\varphi+r\sin^2\varphi)}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$

$$=\frac{r^2}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

$$1+y'^2=1+\left(\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}\right)^2=\frac{r'^2+r^2}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2}.$$

将 $xy'-y$, $1+y'^2$ 及 x,y 代入所给方程,化简整理即得 $r'^2=\dfrac{1-\sin2\varphi}{\sin2\varphi}r^2$.

【3452】 $(x^2+y^2)^2y''=(x+yy')^3$.

提示 仿 3451 题,先求出 $x+yy'$. 利用公式 8 求得 y'. 将 $x+yy'$, y''及 x,y 代入所给方程,即可获解.

解 $x+yy'=r\cos\varphi+r\sin\varphi\dfrac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\dfrac{rr'\cos^2\varphi-r^2\sin\varphi\cos\varphi+rr'\sin^2\varphi+r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$

$$=\frac{rr'}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}.$$

将公式 8, $x+yy'$及 x,y 代入所给方程,化简整理即得 $r(r^2+2r'^2-rr'')=r'^3$.

【3453】 写出表达式$\dfrac{x+yy'}{xy'-y}$在极坐标下的形式.

提示 利用 3451 题中 $xy'-y$ 的结果及 3452 题中 $x+yy'$的结果.

解 将 3451 题中 $xy'-y$ 的结果及 3452 题中 $x+yy'$的结果代入所给表达式,即得

$$\frac{x+yy'}{xy'-y}=\frac{r'}{r}.$$

【3454】 把平面曲线的曲率 $K=\dfrac{|y''_{xx}|}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$

用极坐标 r 及 φ 表示出来.

提示 将 3451 题中 $1+y'^2$ 的结果及 3450 题中 y'' 的结果(即公式 8)代入 K 中,即可获解.

解 将 3451 题中 $1+y'^2$ 的结果及公式 8 代入,化简整理即得

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【3455】 写出方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2),\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2)\end{cases}$

在极坐标下的形式.

解 由原方程组得 $\cos\varphi\dfrac{dr}{dt}-r\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{dt}=r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi$, $\sin\varphi\dfrac{dr}{dt}+r\cos\varphi\dfrac{d\varphi}{dt}=-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi$.

联立解之,即得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r}[r\cos\varphi(r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi)-(-r\sin\varphi)(-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi)]=kr^3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{r}[\cos\varphi(-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi)-\sin\varphi(r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi)]=-1,$$

即原方程组转化为 $\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=kr^3,\\ \dfrac{d\varphi}{dt}=-1.\end{cases}$

【3456】 引用新函数 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$,变换表达式

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}.$$

解 由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 两端微分,得

$$dr=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy$$

或 $$rdr=xdx+ydy. \tag{1}$$

由 $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$ 两端微分,得 $d\varphi=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{r^2}dy-\dfrac{y}{r^2}dx$

或 $$r^2d\varphi=xdy-ydx. \tag{2}$$

于是,由(1)及(2)可得 $xrdr-yr^2d\varphi=(x^2dx+xydy)-(xydy-y^2dx)=(x^2+y^2)dx=r^2dx$,

$$dx=\frac{x}{r}dr-yd\varphi. \tag{3}$$

同理可得 $$dy=\frac{y}{r}dr+xd\varphi. \tag{4}$$

从而由(3)及(4),得

$$xd^2y-yd^2x=x\left(\frac{y}{r}d^2r-\frac{y}{r^2}dr^2+\frac{1}{r}drdy+dxd\varphi+xd^2\varphi\right)-y\left(\frac{x}{r}d^2r-\frac{x}{r^2}dr^2+\frac{1}{r}dxdr-dyd\varphi-yd^2\varphi\right)$$

$$=\frac{dr}{r}(xdy-ydx)+(xdx+ydy)d\varphi+(x^2+y^2)d^2\varphi=\frac{dr}{r}(r^2d\varphi)+(rdr)d\varphi+r^2d^2\varphi=2rdrd\varphi+r^2d^2\varphi,$$

于是, $$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=2r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

【3457】 在勒让德变换中曲线 $y=y(x)$ 的每一点 (x,y) 对应于点 (X,Y),其中

$$X=y',\qquad Y=xy'-y.$$

求 Y'，Y''及 Y'''.

解 $Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{dY}{dx}\frac{dx}{dX}=\frac{xy''}{\frac{dX}{dx}}=\frac{xy''}{y''}=x$； $Y''=\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{1}{y''}$； $Y'''=\frac{\frac{dY''}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{-\frac{y'''}{y''^2}}{y''}=-\frac{y'''}{y''^3}$.

引入新变量 ξ 及 η，解下列方程：

【3458】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$，令 $\xi=x+y$，$\eta=x-y$.

解题思路 只要将 ξ,η 看作中间变量，应用复合函数求偏导数的公式求出$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$，即易获解 $z=\varphi(x+y)$，其中 φ 为任意的函数.

解 当仅作自变量代换，引入新自变量

$$\xi=\xi(x,y),\qquad \eta=\eta(x,y)$$

这个最简单的情形时，只要把 ξ,η 看作中间变量，用复合函数求偏导数的公式，即可求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

代入原方程，即得变换后的方程，本题中，

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial \eta}{\partial y}=-1.$$

于是，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}$，代入原方程，得

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\quad 或\quad \frac{\partial z}{\partial \eta}=0,$$

即 $z=\varphi(\xi)=\varphi(x+y)$，其中 φ 为任意的函数.

【3459】 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$，令 $\xi=x$，$\eta=x^2+y^2$.

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x}=1$，$\frac{\partial \xi}{\partial y}=0$，$\frac{\partial \eta}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial \eta}{\partial y}=2y$.

于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程，得
$$y\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)-2xy\frac{\partial z}{\partial \eta}=0\quad 或\quad y\frac{\partial z}{\partial \xi}=0.$$

由于 $y\neq 0$，故 $\frac{\partial z}{\partial \xi}=0$，即
$$z=\varphi(\eta)=\varphi(x^2+y^2),$$

其中 φ 为任意的函数.

【3460】 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1\ (a\neq 0)$，令 $\xi=x$，$\eta=y-bz$.

解 当变量间的变换关系比较复杂时，用全微分法较好. 首先，根据新旧变元之间的关系，求出它们微分之间的关系

$$d\xi=dx,\qquad d\eta=dy-bdz. \tag{1}$$

其次，将所求得的微分式代入表示新变元关系的全微分式，并按旧变元关系重新整理.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}(dy-bdz),\qquad \left(1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}dy,$$

$$dz=\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}dx+\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}dy.$$

把整理后的式子与表示旧变元的全微分式 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 比较，即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

代入原方程，得
$$a\frac{\partial z}{\partial \xi}+b\frac{\partial z}{\partial \eta}=1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\quad 或\quad \frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{1}{a}.$$

于是，
$$z=\frac{\xi}{a}+\varphi(\eta)=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz).$$

【3461】 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$，令 $\xi=x$ 及 $\eta=\frac{y}{x}$.

提示 仿 3458 题，解为 $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 φ 为任意的函数.

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial \xi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{x}.\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}.$

代入原方程，得 $x\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}=z$，

$$x\frac{\partial z}{\partial \xi}=z\quad 或\quad \xi\frac{\partial z}{\partial \xi}=z.$$

解之，得 $z=\xi\varphi(\eta)=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 φ 为任意的函数.

把 u 与 v 看作新的自变量，变换下列方程：

【3462】 $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$，若 $u=\ln x$，$v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v}.$

注意到 $x=e^u$ 及 $y=\operatorname{sh}v$，代入原方程，即得 $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh}v.$

【3463】 $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$，若 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\arctan\frac{y}{x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，得
$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\left(x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{x-y}{x^2+y^2}\left(y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0\quad 或\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

【3464】 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，若 $u=\frac{y}{x}$，$v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解题思路 本题宜用微分法，先求出 du 及 dv，进而由 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$ 求得 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$，从而可得 $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}$.

解 本题用微分法较好.

$$du=\frac{xdy-ydx}{x^2},$$

$$dv=dz+\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=dz+\frac{xdx+ydy+zdz}{r}\quad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(dz+\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy+\frac{z}{r}dz\right).$$

于是，
$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得 $x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=(z+r)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$,

$$2(z+r)\frac{\partial z}{\partial v}=z+r.$$

如果 $z+r=0$，则可推得 $x^2+y^2=0$，但由于 $x\neq0$，所以，x^2+y^2 不可能为零. 于是，$z+r\neq0$. 从而，得

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}.$$

【3465】 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}$，若 $u=2x-z^2$，$v=\frac{y}{z}$.

解 $du=2dx-2zdz$，　$dv=\frac{dy}{z}-\frac{y}{z^2}dz$.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}(2dx-2zdz)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z}dy-\frac{y}{z^2}dz\right).$$

于是，
$$\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=2\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial u}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得 $2x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{z}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$，　$\left(\frac{y}{z}-\frac{xy}{z^3}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{z}$.

再以 $y=zv$，$x=\frac{1}{2}(u+z^2)$代入上式，最后得

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\frac{z^2+u}{z^2-u}.$$

【3466】$^+$ $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z$，若 $u=x+z$，$v=y+z$.

解 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}(dx+dz)+\frac{\partial z}{\partial v}(dy+dz)$.

于是，$\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy$，　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}$.

将$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，并注意到 $x+y+z=u+v-z$，即得

$$u\frac{\partial z}{\partial u}+v\frac{\partial z}{\partial u}=(u+v-z)\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right),\quad 即\quad (2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u}+(2v+u-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z.$$

【3467】 取 $\xi=y+ze^{-x}$，$\eta=x+ze^{-y}$ 作为新的自变量，变换表达式

$$(z+e^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^y)\frac{\partial z}{\partial y}-(z^2-e^{x+y}).$$

解 $dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta=\frac{\partial z}{\partial \xi}(dy+e^{-x}dz-ze^{-x}dx)+\frac{\partial z}{\partial \eta}(dx+e^{-y}dz-ze^{-y}dy)$.

于是，
$$\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dz=\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1}.$$

代入原式，化简整理即得
$$原式=\frac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

【3468】 令
$$x=uv,\qquad y=\frac{1}{2}(u^2-v^2),$$

变换表达式 $$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

解 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}y=u\mathrm{d}u-v\mathrm{d}v$. 解之,得

$$\mathrm{d}u=\frac{v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y}{u^2+v^2},\qquad \mathrm{d}v=\frac{u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y}{u^2+v^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial z}{\partial u}(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)+\frac{\partial z}{\partial v}(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)\right]\\&=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}y\right],\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2+\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right].$$

【3469】 令 $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=z-x$,变换方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

提示 将 ξ,η,ζ 看作中间变量,仿 3458 题,可得 $\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \zeta}$, $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\quad\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}$.

三式相加即得 $\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$.

【3470】 取 x 作为函数,而 y 和 z 作为自变量,变换方程

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解 $\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial x}{\partial z}\mathrm{d}z$, $\quad\mathrm{d}z=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}\mathrm{d}x-\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}\mathrm{d}y.$

于是, $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}.$$

代入原方程,得 $$(x-z)\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}-y\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}=0,$$

即 $$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}\quad(y\neq 0).$$

【3471】 取 x 作为函数,而 $u=y-z$, $v=y+z$ 作为自变量,变换方程

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}y-\mathrm{d}z$, $\quad\mathrm{d}v=\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$.

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial x}{\partial u}(\mathrm{d}y-\mathrm{d}z)+\frac{\partial x}{\partial v}(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z).$$

于是, $$\left(\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\right)\mathrm{d}y,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}}.$$

代入原方程,去分母,即得 $$\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v}\quad(v\neq 0).$$

【3472】$^+$ 取 x 作为函数及 $u=xz$, $v=yz$ 作为自变量,变换表达式

$$A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

解 $\mathrm{d}u=x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x$， $\mathrm{d}v=y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}y$.

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial x}{\partial u}(x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x)+\frac{\partial x}{\partial v}(y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}y).$$

于是， $\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=\left(1-z\frac{\partial x}{\partial u}\right)\mathrm{d}x-z\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}y$， $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-z\frac{\partial x}{\partial u}}{x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z\frac{\partial x}{\partial v}}{x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}}$.

代入原式，即得

$$A=\frac{\left(1-z\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+z^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}{\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}=\frac{1-2z\frac{\partial x}{\partial u}+z^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{1-2\frac{u}{x}\frac{\partial x}{\partial u}+\left(\frac{u}{x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{v}{u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}=\frac{u^2\left\{x^2-2xu\frac{\partial x}{\partial u}+u^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]\right\}}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}.$$

【3473】 令 $\mathrm{e}^{\xi}=x-u$，$\mathrm{e}^{\eta}=y-u$，$\mathrm{e}^{\zeta}=z-u$，变换方程

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z.$$

解 $\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta=\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathrm{e}^{-\xi}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}u)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathrm{e}^{-\eta}(\mathrm{d}y-\mathrm{d}u)+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathrm{e}^{-\zeta}(\mathrm{d}z-\mathrm{d}u)$.

于是，
$$\left(1+\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathrm{d}z.$$

将由上式确定的$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$代入原方程，即得

$$(y+z+u)\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+(x+z+u)\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+(x+y+u)\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}=(x+y+z)\left(1+\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right).$$

消去同类项，得
$$(x-u)\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+(y-u)\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+(z-u)\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}+(x+y+z)=0$$

即
$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}+3u+\mathrm{e}^{\xi}+\mathrm{e}^{\eta}+\mathrm{e}^{\zeta}=0.$$

在下列方程中，代入新的变量 u,v,w，其中 $w=w(u,v)$：

【3474】 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$，令 $u=x^2+y^2$，$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，$w=\ln z-(x+y)$.

解 $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y$， $\mathrm{d}v=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y$， $\mathrm{d}w=\frac{1}{z}\mathrm{d}z-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

另一方面，$\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v$，故有

$$\frac{1}{z}\mathrm{d}z-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=\frac{\partial w}{\partial u}(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y\right).$$

整理得
$$\mathrm{d}z=\left(2xz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+z\right)\mathrm{d}x+\left(2yz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+z\right)\mathrm{d}y.$$

将由上式确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，得

$$yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)-xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)=(y-x)z,$$

即
$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

【3475】 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$，令 $u=x$，$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$，$w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$.

解 $du=dx$，$dv=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy$，$dw=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz$. 于是，

$$\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz=\frac{\partial w}{\partial u}dx+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy\right),\qquad dz=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx+\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

代入原方程，得
$$z^2\left(1-x^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)+z^2\frac{\partial w}{\partial v}=z^2\quad 或\quad x^2z^2\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

由于 $z\neq0$，$x\neq0$. 故得
$$\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

【3476】 $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$，令 $u=yz-x$，$v=xz-y$，$w=xy-z$.

解 $dw=ydx+xdy-dz=\frac{\partial w}{\partial u}(zdy+ydz-dx)+\frac{\partial w}{\partial v}(zdx+xdz-dy)$.

整理得
$$\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)dz=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx+\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)dy.$$

于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1}.$$

代入方程，得
$$(xy+z)\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)+(1-y^2)\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)=(x+yz)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

即
$$(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

不难验证，由方程 $1-x^2-y^2-z^2-2xyz=0$ 确定的隐函数不是原方程的解（证略）. 于是，
$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

【3477】 $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$，令 $x=ue^w$，$y=ve^w$，$z=we^w$.

解 $dx=e^wdu+ue^wdw$，$dy=e^wdv+ve^wdw$，$dz=e^w(1+w)dw$.

于是，有
$$e^wdw=\frac{1}{1+w}dz,\quad e^wdu=dx-ue^wdw=dx-\frac{u}{1+w}dz,\quad e^wdv=dy-ve^wdw=dy-\frac{v}{1+w}dz.$$

在全微分式 $dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$ 的两端都乘以 e^w，并将上述结果代入，得
$$\frac{dz}{1+w}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(dx-\frac{u}{1+w}dz\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(dy-\frac{v}{1+w}dz\right)$$

或
$$\left(1+u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}\right)dz=(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}dx+(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}dy.$$

将由上式确定的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入原方程，得
$$\left[ue^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}\right]^2+\left[ve^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}\right]^2=(we^w)^2(1+w)^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

消去 $[e^w(1+w)]^2$，即得
$$u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

【3478】 令 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\arctan z$，$w=x+y+z$，其中 $w=w(u,v)$，变换表达式
$$(x-y):\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

解 $dw=dx+dy+dz=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dz}{1+z^2}\right).$

于是，$$\left(1-\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)\mathrm{d}y.$$

将由上式确定的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入所给表达式，即得

$$\frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{(x-y)\left(1-\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)}{\frac{x-y}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}}=\frac{\left(1-\cos^2 v\frac{\partial w}{\partial v}\right)e^{2u}}{\frac{\partial w}{\partial u}}.$$

【3479】 令 $u=xe^z$，$v=ye^z$，$w=ze^z$，其中 $w=w(u,v)$，变换表达式

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 $\mathrm{d}w=e^z(1+z)\mathrm{d}z=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial w}{\partial u}(e^z\mathrm{d}x+xe^z\mathrm{d}z)+\frac{\partial w}{\partial v}(e^z\mathrm{d}y+ye^z\mathrm{d}z).$

于是，$$\left(1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}y,\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}}\qquad A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}:\frac{\partial w}{\partial v}.$$

【3480】 令 $\xi=\frac{x}{z}$，$\eta=\frac{y}{z}$，$\zeta=z$，$w=\frac{u}{z}$，其中 $w=w(\xi,\eta,\zeta)$，变换方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}.$$

解 $\mathrm{d}w=\frac{z\mathrm{d}u-u\mathrm{d}z}{z^2}=\frac{\partial w}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial w}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\partial w}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta=\frac{\partial w}{\partial \xi}\left(\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial \eta}\left(\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial \zeta}\mathrm{d}z.$

两端同乘 z^2，整理得

$$z\mathrm{d}u=z\frac{\partial w}{\partial \xi}\mathrm{d}x+z\frac{\partial w}{\partial \eta}\mathrm{d}y+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial \xi}-y\frac{\partial w}{\partial \eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\mathrm{d}z.$$

将由上式确定的 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 代入原方程，得

$$x\frac{\partial w}{\partial \xi}+y\frac{\partial w}{\partial \eta}+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial \xi}-y\frac{\partial w}{\partial \eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)=u+\frac{xy}{z},\quad 即\quad \frac{\partial w}{\partial \zeta}=\frac{xy}{z^3}=\frac{\xi\eta}{\zeta}.$$

令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，写出下列各式在极坐标 r 和 φ 下的形式：

【3481】 $w=x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}.$

解 $\mathrm{d}x=\cos\varphi\mathrm{d}r-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$，$\mathrm{d}y=\sin\varphi\mathrm{d}r+r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$. 联立解之，得

$$\mathrm{d}r=\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y,\qquad \mathrm{d}\varphi=\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}x.$$

于是，$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\mathrm{d}y,$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\end{cases}\qquad 公式 9$$

将公式 9 代入原式，即得

$$w=x\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)-y\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)=\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

【3482】 $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}.$

解 将公式 9 代入,即得

$$w=x\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+y\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

【3483】 $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$

解 $w=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2.$

【3484】 $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

解 先导出极坐标变换的所有二阶偏导数的变换式,将 r,φ 看作中间变量,x,y 看作自变量. 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 r&=\mathrm{d}(\mathrm{d}r)=\mathrm{d}\left(\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{1}{r}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)-\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{r}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)-\frac{1}{r^3}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2=\frac{1}{r^3}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2,\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}^2\varphi=\mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi)=\mathrm{d}\left(\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}x\right)=-\frac{2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{r^3}\mathrm{d}r=-\frac{2}{r^4}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y),$$

故有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 u&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\mathrm{d}r^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\mathrm{d}\varphi^2+\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}^2 r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathrm{d}^2\varphi\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r}\right)\left(\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{r^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{r^2}\right)^2\\&\quad+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{r^3}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{2}{r^4}\right)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

将上式右端按 $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}y^2$ 合并同类项,并与全微分式

$$\mathrm{d}^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

比较,即得

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\varphi},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\varphi},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{x^2-y^2}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}-\frac{xy}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{xy}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{x^2-y^2}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.\end{cases}\qquad\text{公式 10}$$

将公式 10 代入原式,即得 $w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$

【3485】 $w=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

解 将公式 10 代入原式,化简整理得 $w=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$

【3486】 $w=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right).$

解 将公式 10 中的 u 换成 z,然后代入原式,化简整理得 $w=\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}.$

【3487】 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,变换表达式

$$I=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

解 对函数 u 及 v 分别用公式 9,即得

$$I=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{y}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{x}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

【3488】 引入新的自变量 $\xi=x-at,\eta=x+at$,解方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

解 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial t}=-a\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+a\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

于是，由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$. 解之，得 $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi)$，从而，

$$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(x-at)+\psi(x+at),$$

其中 φ 及 ψ 为任意的函数.

取 u 及 v 作新的自变量，变换下列方程：

【3489】 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，设 $u=x+2y+2$ 及 $v=x-y-1$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=2\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理即得
$$3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0.$$

【3490】 $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，设 $u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 及 $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\dfrac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u}\right)=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{1+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理即得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

【3491】[+] $ax^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (a,b,c 为常数)，设 $u=\ln x$，$v=\ln y$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\quad\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{xy}\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得
$$a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0.$$

【3492】 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}.\end{cases}\qquad \text{公式 11}$$

本题中， $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$， $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}，\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial u}{\partial x}，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}，$$

同法可得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

注意到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2，\quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}，\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0，$$

则由公式 11，即得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0.$$

由于 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\neq 0$，故得变换后的方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$

【3493】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0$，设 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$.

解 由于 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$，故有

$$x^2+y^2=e^{2u}，\quad u=\ln\sqrt{x^2+y^2}，\quad \tan v=\frac{y}{x}，\quad v=\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}$$

（v 的多值性不影响求导所得的结果）. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial v}{\partial y}，\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由 3492 题得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z=\left[\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z$$

$$=e^{-2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z=0，$$

即
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2 e^{2u} z=0.$$

【3494】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ （$y>0$），设 $u=x-2\sqrt{y}$ 及 $v=x+2\sqrt{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=1$，$\frac{\partial v}{\partial x}=1$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{y}}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0，\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}，\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}.$$

由公式 11 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}，$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$

【3495】 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设 $u=xy$，$v=\frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}$.

由公式 11 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$

代入原方程,化简整理得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

【3496】 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=x+y$, $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

代入原方程,得

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

注意到 $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{u}{xy}$,即 $xy=\frac{u}{v}$,于是,

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}(x-y)^2=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2[(x+y)^2-4xy]=v^2\left(u^2-4\frac{u}{v}\right)=uv(uv-4).$$

从而得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

【3497】 $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$,设 $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 及 $v=xy$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}$.

代入原方程,得

$$[(x^2+y^2)^2-4x^2y^2]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=4xy\frac{\partial z}{\partial u},$$

即

$$(u^2-v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}.$$

【3498】[+] $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=x\tan\frac{y}{2}$, $v=x$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\tan\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\tan^2\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\tan\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\tan\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x^2}{4}\sec^4\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\tan\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$.

代入原方程,得

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(x\sin y\sec^2\frac{y}{2}-\frac{x}{2}\sin^2 y\sec^2\frac{y}{2}\tan\frac{y}{2}\right)\frac{\partial z}{\partial u}=\left(2x\tan\frac{y}{2}-2x\tan\frac{y}{2}\sin^2\frac{y}{2}\right)\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$=2x\tan\frac{y}{2}\cos^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x\tan\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{y}{2}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

即 $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}$.

【3499】 $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ $(x>0,y>0)$,设 $x=(u+v)^2$ 及 $y=(u-v)^2$.

解 由 $x=(u+v)^2$ 及 $y=(u-v)^2$ 分别对 x 及对 y 求偏导数,得

$$\begin{cases}1=2(u+v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\ 0=2(u-v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\right);\end{cases}\qquad \begin{cases}0=2(u+v)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\ 1=2(u-v)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right).\end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4(u+v)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{4(u-v)}.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4(u+v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{4(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{4(u+v)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{4(u+v)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=-\frac{1}{8(u+v)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{16(u+v)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{8(u-v)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{16(u-v)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

代入原方程，得

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=-\frac{1}{8(u+v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+\frac{1}{8(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{4v}{u^2-v^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{4u}{u^2-v^2}\frac{\partial z}{\partial v}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)=0,$$

即
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0.$$

【3500】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$，设 $u=x$，$v=y+z$.

解 由 $u=x$，$v=y+z$ 得

$$du=dx,\quad dv=dy+dz,\quad dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}(dy+dz).$$

于是，
$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

$$1+\frac{\partial z}{\partial y}=1+\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}=\frac{1}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}. \tag{1}$$

又
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial u}\right]. \tag{2}$$

将(1)式和(2)式代入原方程，去分母即得

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=1.$$

【3501】 利用线性变换 $\xi=x+\lambda_1 y,\eta=x+\lambda_2 y$，把方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

(其中 A,B 和 C 为常数且 $C\neq 0$，$AC-B^2<0$)变换为下面的形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

求满足方程(1)的函数的一般形式.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\lambda_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$.

将上述结果代入原方程，得

$$(A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2[A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+(A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

当 $A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2=0$ 及 $A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2=0$. 即 λ_1 与 λ_2 为方程 $A+2B\lambda+C\lambda^2=0$ 的根时（注意，由假定 $C\neq 0, AC-B^2<0$，故此方程恰有两个相异的实根），原方程变换为

$$[A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0.$$

由根与系数的关系得：$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{2B}{C}$，$\lambda_1\lambda_2=\frac{A}{C}$. 于是，

$$A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2=\frac{2(AC-B^2)}{C}\neq 0.$$

从而，必有 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$. 此时，$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0$，故 $\frac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi)$ 且

$$u=\int f(\xi)\mathrm{d}\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y).$$

【3502】 证明：拉普拉斯方程 $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

的形式在满足条件 $\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}=-\frac{\partial \psi}{\partial u}$

的任何非退化变换 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$

下保持不变.

证 $\mathrm{d}x=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}y=\frac{\partial \psi}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial \psi}{\partial v}\mathrm{d}v=-\frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}u+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}v$.

令 $I=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2$. 由于变换是非退化的，故知

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2=I\neq 0.$$

由上述方程组解得 $\mathrm{d}u=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}x-\frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}y\right)$, $\mathrm{d}v=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}x+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}y\right)$.

于是，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial \varphi}{\partial v}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

由 3492 题的证明及公式 11，并考虑到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{I^2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\right]=\frac{1}{I},$$

即得 $$\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0,$$

或 $$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

即形式是不变的.

【3503】 令 $u=f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，变换方程：

(1) $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; (2) $\Delta(\Delta u)=0$.

解 (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=f'(r)\frac{\partial y}{\partial r}$.

于是，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right]=\frac{f'(r)}{r}+\frac{x^2}{r^2}f''(r)+xf'(r)\left(-\frac{x}{r^3}\right)=\frac{x^2}{r^2}f''(r)+\frac{y^2}{r^3}f'(r).$$

同法可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}f''(r)+\frac{x^2}{r^3}f'(r)$. 于是，

$$\Delta u=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0,$$

也可写成 $\Delta u=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0$.

$$(2)\Delta(\Delta u)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(\Delta u)\right]=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right)\right]=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d^3u}{dr^3}+\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right]$$

$$=\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}=0.$$

【3504】 若令 $w=f(u)$，其中 $u=(x-x_0)(y-y_0)$，则方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+cw=0$ 化为何种形式？

解 $\frac{\partial w}{\partial x}=(y-y_0)\frac{dw}{du}$， $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{dw}{du}+u\frac{d^2w}{du^2}$，于是，方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+cw=0$ 变换成

$$u\frac{d^2w}{du^2}+\frac{dw}{du}+cw=0.$$

【3505】 令 $x+y=X$，$y=XY$，变换表达式

$$A=x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}.$$

解 $X=x+y$， $Y=\frac{y}{X}=\frac{y}{x+y}=1-\frac{x}{x+y}$. 于是，

$$\frac{\partial X}{\partial x}=1,\ \frac{\partial X}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{y}{(x+y)^2},\ \frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{x}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial X}-\frac{y}{(x+y)^2}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-\frac{2y}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\frac{y^2}{(x+y)^4}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+\frac{2y}{(x+y)^3}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{x-y}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}-\frac{xy}{(x+y)^4}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}-\frac{x-y}{(x+y)^3}\frac{\partial u}{\partial Y}.$$

代入所给式子，得

$$A=X\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}.$$

【3506】 证明：方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z^2=0$ 的形式在变换 $x=uv$ 及 $y=\frac{1}{v}$ 下保持不变.

证 $v=\frac{1}{y}$，$u=\frac{x}{v}=xy$. 于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial z}{\partial u}\right)=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

代入原方程，得

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy^3\frac{\partial z}{\partial u}+2x(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial u}-2(y-y^3)\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}+x^2y^2z^2=0.$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2uv^2\frac{\partial z}{\partial u}+2(v-v^3)\frac{\partial z}{\partial v}+u^2v^2z^2=0,$$

故其形式保持不变.

【3507】 证明：方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 的形式在变换 $u=x+z$ 及 $v=y+z$ 下保持不变.

证 将 u,v 作中间变量，x,y 作自变量，微分得

$$du=dx+dz,\quad dv=dy+dz,\quad d^2u=d^2v=d^2z.$$

于是，$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz+\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy.$$

令 $A=1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$,则有 $dz=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial v}dy$,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

从而有 $$du=dx+dz=\frac{1-\frac{\partial z}{\partial v}}{A}dx+\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{A}dy,\qquad dv=dy+dz=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{A}dx+\frac{1-\frac{\partial z}{\partial u}}{A}dy,$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u+\frac{\partial z}{\partial v}d^2v.$$

上面最后一个等式即

$$Ad^2z=\frac{1}{A^2}\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy\right]^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy\right]\left[\frac{\partial z}{\partial u}dx+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)dy\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left[\frac{\partial z}{\partial u}dx+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)dy\right]^2\right\}.$$

于是，
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{A^3}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right],$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{A^3}\left[\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right],$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{A^3}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right].$$

代人原方程,化简整理即得 $$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

故其形式保持不变.

【3508】 令 $$x=\eta\zeta,\qquad y=\xi\zeta,\qquad z=\xi\eta,$$

变换方程 $$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0.$$

解 由于
$$\begin{cases}1=\zeta\frac{\partial \eta}{\partial x}+\eta\frac{\partial \zeta}{\partial x},\\ 0=\zeta\frac{\partial \xi}{\partial x}+\xi\frac{\partial \zeta}{\partial x},\\ 0=\eta\frac{\partial \xi}{\partial x}+\xi\frac{\partial \eta}{\partial x}\end{cases}$$

故有 $$\frac{\partial \xi}{\partial x}=-\frac{\xi}{2\eta\zeta},\qquad \frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{2\zeta},\qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{1}{2\eta}.$$

同法求得 $$\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{1}{2\zeta},\qquad \frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\eta}{2\xi\zeta},\qquad \frac{\partial \zeta}{\partial y}=\frac{1}{2\xi}.$$

于是，
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}=-\frac{\xi}{2\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\xi}{2\eta\zeta}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\xi}{2\eta\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{2\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\eta}\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$
$$=-\frac{1}{4\eta\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\xi}{4\eta\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{1}{4\xi\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\eta}{4\xi\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{1}{4\xi\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{2\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}.\tag{1}$$

同法可求得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{4\eta\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{1}{4\xi^2\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\eta}{4\xi^2\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{4\xi^2\eta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{\zeta}{4\xi^2\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{2\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta},\tag{2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{1}{4\eta^2\zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\xi}{4\eta^2\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{4\xi\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{4\eta^2\xi}\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{\zeta}{4\eta^2\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{2\eta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}.\tag{3}$$

将(1),(2),(3)三式连同 x,y,z 一起代入原方程,化简整理得

$$\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\eta\zeta\frac{\partial_u}{\partial\eta\partial\zeta}+\zeta\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\xi}\right),$$

即
$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\zeta}+\zeta\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\xi}\right).$$

【3509】 令
$$y_1=x_2+x_3-x_1,\quad y_2=x_1+x_3-x_2,\quad y_3=x_1+x_2-x_3,$$
变换方程
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3}=0.$$

解 不难看出

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z,\quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z,\quad \frac{\partial z}{\partial x_3}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z.$$

把上述结果代入所给的方程的左端,即得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3}\\
&=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}+\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_2}\right)\\
&=2\left[\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_3}+\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_1}+\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial}{\partial y_2}\right]\\
&=2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}\right).\end{aligned}$$

从而,原方程变换为
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}=0.$$

【3510】 令
$$\xi=\frac{y}{x},\quad \eta=\frac{z}{x},\quad \zeta=y-z,$$
变换方程
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0.$$

提示 将方程写为 $A^2u-Au=0$ 的形式,其中

$$A=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}.$$

解 定义算子 A: $Au=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)u$, 则有

$$\begin{aligned}A^2u&=A(Au)=x\frac{\partial}{\partial x}(Au)+y\frac{\partial}{\partial y}(Au)+z\frac{\partial}{\partial z}(Au)=x\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+z\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\right)u\\
&\quad+y\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2}{\partial y^2}+z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\right)u+z\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+y\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+z\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u\\
&=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u+Au.\end{aligned}$$

于是,原方程可改写成
$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=0\quad 或\quad A^2u-Au=0.$$

但是,

$$\begin{aligned}Au&=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)+z\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)\\
&=(y-z)\frac{\partial u}{\partial\zeta}=\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta},\end{aligned}$$

$$A^2u=A(Au)=\left(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)Au=\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta},$$

从而,$A^2u-Au=\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}$. 由于 $\zeta\neq0$,故原方程变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=0.$$

【3511】 令 $x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta,$

把表达式

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \quad 及 \quad \Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

变换为球坐标下的形式.

提示 所给变换由下面两个特殊的变换构成：

$$x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,\ z=z;\qquad R=r\sin\theta,\ \varphi=\varphi,\ z=r\cos\theta,$$

并分别利用 3483 题及 3484 题的结果.

解 先作变换 $x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,\ z=z$,它相当于对 x,y 坐标作一次极坐标变换.

利用 3483 题及 3484 题的结果,对新变元 R,φ,z 有

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

再作变换 $R=r\sin\theta,\ \varphi=\varphi,\ z=r\cos\theta$. 它相当于对 R,z 坐标又作一次极坐标变换,其中 R 相当于公式 9 中的 y,θ 相当于公式 9 中的 φ. 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial R}=\frac{R}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{z}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

再利用 3483 题及 3484 题的结果,得

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 u&=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\\&=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right].\end{aligned}$$

注意到两次变换的乘积就是所给的变换,因此,最后得到 $\Delta_1 u$ 及 $\Delta_2 u$ 的结果即为所求.

【3512】 引入新函数 w,令 $w=z^2$,变换方程

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{1}{2z}\dfrac{\partial w}{\partial x},\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2z}\dfrac{\partial w}{\partial y},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

代入原方程,化简整理即得 $\quad w\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$

即形式是不变的.

取 u 和 v 为新的自变量,而 $w=w(u,v)$ 为新函数,变换下列方程:

【3513】 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$,设 $u=\dfrac{x}{y},v=x,w=xz-y$.

解 从 3513 题到 3522 题均属作变换

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),\quad w=w(x,y,z)$$

的类型.我们来导出一般公式,顺便指出一般方法.

将 u,v 看作中间变量,x,y 看作自变量,则有

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

$$\mathrm{d}^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2,\quad \mathrm{d}^2v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.$$

$$\mathrm{d}^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}^2z.$$

将 $\mathrm{d}w,\mathrm{d}u$ 及 $\mathrm{d}v$ 代入全微分式 $\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v$,化简整理得

$$\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z=\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}y.$$

于是,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right),\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\right),\end{cases}\qquad \text{公式 12}$$

其中$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$是原方程中旧变元间的偏导数,而$\frac{\partial w}{\partial u}$及$\frac{\partial w}{\partial v}$是变换后新变元间的偏导数,其他均为由已给变换导出的已知关系式.

把上面求得的 $\mathrm{d}^2w,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}^2u,\mathrm{d}^2v$ 代入表示新变元关系的二阶全微分式:

$$\mathrm{d}^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\mathrm{d}v^2+\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}^2u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}^2v,$$

再把式中的 $\mathrm{d}z$ 表成已求得的$\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$,按 $\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}y^2$ 合并同类项,最后把所得的结果与表示旧变元关系的全微分式:

$$\mathrm{d}^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

相比较,即得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right.\\ \qquad\left.-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right],\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right.\\ \qquad\left.-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right],\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right.\\ \qquad\left.-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right].\end{cases}\qquad \text{公式 13}$$

公式 13 太复杂,一般不直接应用.本题用求偏导数法较方便.由于

$$\frac{\partial w}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial y}-1\quad 及\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u},$$

故得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}.$$

于是,

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}\left(y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2y\frac{\partial z}{\partial y}\right)=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\right]$$

$$=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x}\right)-y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{2}{x}-y^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\frac{2}{x}+\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{2}{x}.$$

由于$\frac{x}{y^3}\neq 0$,故原方程变换为 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$.

【3514】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设 $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$, $w=\frac{z}{x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=1$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{z}{x^2}$, $\frac{\partial w}{\partial y}=0$, $\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x}$.

代入公式 12,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x^2}\right)=x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

令 $R=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}-\frac{\partial w}{\partial v}=w-(1+v)\frac{\partial w}{\partial v}$. 于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial v}\left[w-(1+v)\frac{\partial w}{\partial v}\right]\left(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial v}-(1+v)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right]\left[-\frac{1}{x}(1+v)\right]=\frac{1}{x}(1+v)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0,$$

由于 $x\neq 0$, $1+v\neq 0$,故原方程变为 $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

【3515】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,设 $u=x+y, v=x-y, w=xy-z$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial w}{\partial x}=y$, $\frac{\partial w}{\partial y}=x$, $\frac{\partial w}{\partial z}=-1$.

代入公式 12,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

令 $R=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y-2\frac{\partial w}{\partial u}=u-2\frac{\partial w}{\partial u}$.

于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=2\frac{\partial}{\partial u}\left(u-2\frac{\partial w}{\partial u}\right)=2-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0,$$

原方程变换为 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$.

【3516】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$, 设 $u=\frac{x+y}{2}, v=\frac{x-y}{2}, w=ze^y$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}=-\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}=0$, $\frac{\partial w}{\partial y}=ze^y$, $\frac{\partial w}{\partial z}=e^y$.

代入公式 12,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-z.$$

于是,
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+z\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=e^{-y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)=e^{-y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)=z.$$

原方程变换为
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2ze^y=2w.$$

【3517】 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设 $u=x, v=x+y, w=x+y+z$.

解 由公式 12 不难求出 $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}-1,\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial v}-1.$

于是，$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial u}$. 同 3514 题的方法可求得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2},$$

$$\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)=\left(\frac{v}{u}-1\right)\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

将上述结果代入原方程，即得 $\quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\dfrac{v}{u}-1\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$

【3518】 $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$，设 $x=\sin u, y=\sin v, z=\mathrm{e}^w$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{e}^w}{\cos u}\dfrac{\partial w}{\partial u},\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\mathrm{e}^w}{\cos v}\dfrac{\partial w}{\partial v},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{e}^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{e}^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos u}\left[\frac{\mathrm{e}^w}{\cos u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\mathrm{e}^w}{\cos u}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\mathrm{e}^w\sin u}{\cos^2 u}\frac{\partial w}{\partial u}\right]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^w}{\cos^2 u}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\tan u\frac{\partial w}{\partial u}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\mathrm{e}^w}{\cos^2 v}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\tan v\frac{\partial w}{\partial v}\right].$$

将上述结果代入原方程，并注意到 $\quad 1-x^2=\cos^2 u,\qquad 1-y^2=\cos^2 v,$

化简整理即得 $\quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0.$

【3519】 $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{4}z=0\ (|x|<1)$，设

$$u=\frac{1}{2}(y+\arccos x),\quad v=\frac{1}{2}(y-\arccos x),\quad w=z\sqrt[4]{1-x^2}.$$

解 由公式 12 不难求出 $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}-\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)+\dfrac{xz}{2(1-x^2)},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

于是，

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{xz}{2}\right]$$

$$=-\frac{x}{4(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{z}{2}+\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{z}{2}+\frac{x^2 z}{4(1-x^2)}+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{z}{4}+\frac{z}{4(1-x^2)}+\frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$=\frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

将上述结果代入原方程，并注意到 $\quad \arccos x=u-v,\quad x=\cos(u-v),\quad 1-x^2=\sin^2(u-v),$

化简整理即得 $\quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\dfrac{w}{4\sin^2(u-v)}.$

【3520】 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{x^2-y^2}-\dfrac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}$ $(|x|>|y|)$，设

$$u=x+y,\ v=x-y,\ w=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

解 原方程可改写为

$$\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{2y}{(x^2-y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^3}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^3}. \tag{1}$$

由公式 12 不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{xz}{x^2-y^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{yz}{x^2-y^2}.$$

于是，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{xz}{(x^2-y^2)^2}\right]$$

$$=-\frac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{x}{(x^2-y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{4x^2z}{(x^2-y^2)^3}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3x^2z}{(x^2-y^2)^3}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3x^2z}{(x^2-y^2)^3}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

同法可求得

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{yz}{(x^2-y^2)^2}\right]$$

$$=-\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3y^2z}{(x^2-y^2)^3}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

将上述结果代入方程(1)，化简整理即得 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$

【3521】 证明:任何方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}+cz=0$ （a,b,c 为常数）

用代换 $z=ue^{\alpha x+\beta y}$[其中 α 与 β 为常量，$u=u(x,y)$]可以化为下面的形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1u=0\quad (c_1=\text{常数}).$$

证 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\alpha u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\beta u+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\alpha\beta u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right).$

将上述结果代入所给方程，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(\beta+a)\frac{\partial u}{\partial x}+(\alpha+b)\frac{\partial u}{\partial y}+(\alpha\beta+\alpha a+b\beta+c)u=0.$$

按题意，需 $\beta+a=0$ 及 $\alpha+b=0$，即 $\beta=-a$，$\alpha=-b$，这是可能的.事实上，只需取代换 $z=ue^{-(bx+ay)}$，原方程即变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1u=0\quad (c_1\ \text{为常数}).$$

【3522】 证明:方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$的形式在变换 $x'=\dfrac{x}{y}$，$y'=-\dfrac{1}{y}$，$u=\dfrac{u'}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$ （u'为变量 x' 与 y' 的函数）下保持不变.

证 $dx'=\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x}{y^2}dy$， $dy'=\dfrac{1}{y^2}dy$， $\ln u'=\ln u+\dfrac{1}{2}\ln y+\dfrac{x^2}{4y}$， $du'=\dfrac{u'}{u}du+\dfrac{u'}{2y}dy+\dfrac{xu'}{2y}dx-\dfrac{x^2u'}{4y^2}dy.$

把上面三个微分式代入 $du'=\frac{\partial u'}{\partial x'}dx'+\frac{\partial u'}{\partial y'}dy'$，得

$$\frac{u'}{u}du+\frac{u'}{2y}dy+\frac{xu'}{2y}dx-\frac{x^2u'}{4y^2}dy=\frac{\partial u'}{\partial x'}\left(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy\right)+\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{dy}{y^2},$$

整理得
$$du=\left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y}\right)dx+\left(\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial y'}-\frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{x^2u}{4y^2}-\frac{u}{2y}\right)dy.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial y'}-\frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{x^2u}{4y^2}-\frac{u}{2y},\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y}\right)=\frac{u}{yu'}\frac{\partial^2u'}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{1}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{yu'^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2\frac{\partial x'}{\partial x}-\frac{u}{2y}-\frac{x}{2y}\frac{\partial u}{\partial x}\\&=\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial^2u'}{\partial x'^2}+\left(\frac{1}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{x}{2y}\right)\left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y}\right)-\frac{u}{y^2u'^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2-\frac{u}{2y}\\&=\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial^2u'}{\partial x'^2}-\frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{x^2u}{4y^2}-\frac{u}{2y}.\end{aligned}\tag{2}$$

将(1)式和(2)式代入原方程，得
$$\frac{\partial^2u'}{\partial x'^2}=\frac{\partial u'}{\partial y'},$$

即方程的形式不变.

【3523】 令 $u=x+z$，$v=y+z$，$w=x+y+z$，且认为 $w=w(u,v)$，变换方程

$$q(1+q)\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+p(1+p)\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0,$$

其中 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 本题用全微分法解较好.由

$$dz=pdx+qdy \quad 及 \quad u=x+z,\ v=y+z,\ w=x+y+z$$

可得

$$du=dx+dz=(1+p)dx+qdy,\quad dv=dy+dz=pdx+(1+q)dy,\quad d^2u=d^2v=d^2w=d^2z.$$

把上述结果代入新变元的全微分式

$$d^2w=\frac{\partial^2w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2w}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v,$$

并记 $S=1-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}$，即得

$$Sd^2z=\frac{\partial^2w}{\partial u^2}[(p+1)dx+qdy]^2+2\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}[(p+1)dx+qdy][pdx+(q+1)dy]+\frac{\partial^2w}{\partial v^2}[pdx+(q+1)dy]^2.$$

将上式与
$$d^2z=\frac{\partial^2z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}dy^2$$

比较，可得
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2z}{\partial x^2}&=\frac{1}{S}\left[(1+p)^2\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+2p(1+p)\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}+p^2\frac{\partial^2w}{\partial v^2}\right],\\\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}&=\frac{1}{S}\left[q(p+1)\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}+p(q+1)\frac{\partial^2w}{\partial v^2}\right],\\\frac{\partial^2z}{\partial y^2}&=\frac{1}{S}\left[q^2\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+2q(q+1)\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}+(q+1)^2\frac{\partial^2w}{\partial v^2}\right].\end{aligned}$$

代入原方程，并注意到

$$\begin{aligned}&q(1+q)(1+p)^2-(1+p+q+2pq)q(p+1)+p(1+p)q^2\\&=q(1+p)[(1+p)(1+q)-(1+p+q+2pq)+pq]=0,\\&p^2q(1+q)-(1+p+q+2pq)p(q+1)+p(1+p)(q+1)^2=0\end{aligned}$$

及
$$2p(1+p)q(1+q)-(1+p+q+2pq)^2+2q(q+1)p(1+p)=-(1+p+q)^2,$$

原方程变换为 $-\frac{(1+p+q)^2}{S}\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}=0$ 或 $\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}=0$.

【3524】 令 $x=e^{\xi}, y=e^{\eta}, z=e^{\zeta}, u=e^{w}$，其中 $w=w(\xi,\eta,\zeta)$，变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}\dfrac{\partial w}{\partial \xi}\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^w}{x}\dfrac{\partial w}{\partial \xi}$,

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^w\frac{\partial w}{\partial \xi},\quad y\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^w\frac{\partial w}{\partial \eta},\quad z\frac{\partial u}{\partial z}=\mathrm{e}^w\frac{\partial w}{\partial \zeta}. \tag{1}$$

(1) 式两端对 x 求偏导数，得 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^w\left(\dfrac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^w\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$. 两端同乘 x，整理得

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\mathrm{e}^w\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+\mathrm{e}^w\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}-\mathrm{e}^w\frac{\partial w}{\partial \xi}. \tag{2}$$

同法可得

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mathrm{e}^w\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\mathrm{e}^w\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}-\mathrm{e}^w\frac{\partial w}{\partial \eta}, \tag{3}$$

$$z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\mathrm{e}^w\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2+\mathrm{e}^w\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}-\mathrm{e}^w\frac{\partial w}{\partial \zeta} \tag{4}$$

将(2),(3),(4)三式代入原方程，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}=(\mathrm{e}^w-1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right]+\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

【3525】 证明：方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$ 的形式与变量 x,y 和 z 所分别担任的角色无关.

证 令 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$，则 $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$. 若以 x 作为新函数，则有

$$\mathrm{d}^2x=\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2+\frac{\partial x}{\partial y}\mathrm{d}^2y+\frac{\partial x}{\partial z}\mathrm{d}^2z.$$

今以作为旧变元的关系： $\mathrm{d}^2x=0$， $\mathrm{d}^2y=0$， $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$

代入上式，可得 $$\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\mathrm{d}y(p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y)+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y)^2\right].$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-p\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-p\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-p\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right). \tag{3}$$

将(1),(2),(3)三式代入原方程，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=p^2\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2$$

$$=p^4\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2\right]=0,$$

即 $$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2=0.$$

类似地，若以 y 作为函数，则也有 $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z}\right)^2=0,$$

即方程的形式与变量 x,y 和 z 所分别担任的角色无关.

【3526】 取 x 作为变量 y 和 z 的函数，解方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 将 3525 题中的(1),(2),(3)三式及 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 代入，得

$$q^2\left(-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)+2pq\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+p^2q\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2pq\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)=-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0,$$

即$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$ 或 $p=0$. 由$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$ 解之,得原方程的解为

$$x=\varphi(z)y+\psi(z),$$

其中 φ,ψ 为任意函数;由 $p=0$ 解之,得 $z=f(y)$(f 为任意函数),它也是原方程的解.

【3527】$^+$ 运用勒让德变换 $X=\frac{\partial z}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial z}{\partial y}$, $Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z$,

其中 $Z=Z(X,Y)$,变换方程

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 $\mathrm{d}Z=\mathrm{d}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y-\mathrm{d}z+x\mathrm{d}X+y\mathrm{d}Y=x\mathrm{d}X+y\mathrm{d}Y.$

于是,
$$\frac{\partial Z}{\partial X}=x,\quad \frac{\partial Z}{\partial Y}=y.$$

微分上式,得
$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\mathrm{d}X+\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\mathrm{d}Y,\\ \mathrm{d}y=\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\mathrm{d}X+\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\mathrm{d}Y.\end{cases}\tag{1}$$

又由 $X=\frac{\partial z}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial z}{\partial y}$,微分得
$$\begin{cases}\mathrm{d}X=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y,\\ \mathrm{d}Y=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y.\end{cases}\tag{2}$$

由(1)式与(2)式,得

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}X\\ \mathrm{d}Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

由此可知
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

从而,
$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{vmatrix}=1,$$

因此
$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{vmatrix}\neq 0.$$

于是,由(1)式解之,得
$$\begin{cases}\mathrm{d}X=I^{-1}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\mathrm{d}x-\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\mathrm{d}y\right),\\ \mathrm{d}Y=I^{-1}\left(-\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\mathrm{d}y\right).\end{cases}\tag{3}$$

比较(2)式与(3)式,得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$.

代入原方程,即得
$$A(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}-2B(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}+C(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}=0.$$

§5. 几何上的应用

1° **切线和法平面** 曲线

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad z=\chi(t)$$

在其上一点 $M(x,y,z)$ 的切线方程为 $$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

在此点的法平面方程为 $$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0.$$

2° **切平面和法线** 曲面 $z=f(x,y)$ 在其上一点 $M(x,y,z)$ 的切平面方程为

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

在点 M 处的法线方程为 $$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}.$$

若曲面方程以隐函数的形式 $F(x,y,z)=0$ 给出，则切平面方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

法线方程为 $$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

3° **平面曲线族的包络线** 含一个参数的曲线族 $f(x,y,\alpha)=0$ (α 为参数)的包络线满足方程组：

$$f(x,y,\alpha)=0,\qquad f'_\alpha(x,y,\alpha)=0.$$

4° **曲面族的包络面** 含一个参数的曲面族 $F(x,y,z,\alpha)=0$ 的包络面满足方程组：

$$F(x,y,z,\alpha)=0,\qquad F'_\alpha(x,y,z,\alpha)=0.$$

含两个参数的曲面族 $\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0$ 的包络面满足方程组：

$$\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\quad \Phi'_\alpha(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\quad \Phi'_\beta(x,y,z,\alpha,\beta)=0.$$

写出下列曲线在已知点的切线和法平面方程：

【3528】 $x=a\cos\alpha\cos t, y=a\sin\alpha\cos t, z=a\sin t$；在点 $t=t_0$.

解 曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 在点 $t=t_0$ 的切向量为 $\boldsymbol{v}(t_0)=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$. 本题中，当 $t=t_0$ 时曲线上点的坐标及曲线在该点的切向量分别为

$$x_0=x(t_0)=a\cos\alpha\cos t_0,\quad y_0=y(t_0)=a\sin\alpha\cos t_0,\quad z_0=z(t_0)=a\sin t_0;$$

$$\boldsymbol{v}(t_0)=\{-a\cos\alpha\sin t_0,-a\sin\alpha\sin t_0,a\cos t_0\}.$$

于是，切线方程为 $$\frac{x-x_0}{-a\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-a\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{a\cos t_0},$$

即 $$\frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{\cos t_0};$$

法平面方程为 $(-a\cos\alpha\sin t_0)(x-x_0)+(-a\sin\alpha\sin t_0)(y-y_0)+(a\cos t_0)(z-z_0)=0$,

以 x_0,y_0,z_0 的值代入上式，化简整理得

$$x\cos\alpha\sin t_0+y\sin\alpha\sin t_0-z\cos t_0=0,$$

即法平面过原点.

【3529】 $x=a\sin^2 t$, $y=b\sin t\cos t$, $z=c\cos^2 t$；在点 $t=\frac{\pi}{4}$.

解 $x_0=a\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{a}{2}$, $y_0=\frac{b}{2}$, $z_0=\frac{c}{2}$; $\boldsymbol{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\{a,0,-c\}$

于是，切线方程为 $\begin{cases}\dfrac{x-\dfrac{a}{2}}{a}=\dfrac{z-\dfrac{c}{2}}{-c},\\ y=\dfrac{b}{2};\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1,\\ y=\dfrac{b}{2};\end{cases}$

法平面方程为 $a\left(x-\dfrac{a}{2}\right)+(-c)\left(z-\dfrac{c}{2}\right)=0$,

即 $ax-cz=\dfrac{1}{2}(a^2-c^2)$.

【3530】 $y=x$, $z=x^2$；在点 $M(1,1,1)$.

解 设 $x=t$，则 $y=t$, $z=t^2$. 于是，$\boldsymbol{v}(1)=\{1,1,2\}$，切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2};$$

法平面方程为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$ 或 $x+y+2z=4$.

【3531】 $x^2+z^2=10$, $y^2+z^2=10$；在点 $M(1,1,3)$.

提示 曲线在该点的切向量为 $\boldsymbol{v}=\{1,0,3\}\times\{0,1,3\}$.

解 当曲线以两个曲面方程 $F_1(x,y,z)=0,F_2(x,y,z)=0$ 交线形式给出时，可先求出两曲面在交点处的法向量：

$$\boldsymbol{n}_1=\{F'_{1x},F'_{1y},F'_{1z}\},\qquad \boldsymbol{n}_2=\{F'_{2x},F'_{2y},F'_{2z}\},$$

则曲线在该点的切向量为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\left\{\begin{vmatrix}F'_{1y}&F'_{1z}\\F'_{2y}&F'_{2z}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_{1z}&F'_{1x}\\F'_{2z}&F'_{2x}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_{1x}&F'_{1y}\\F'_{2x}&F'_{2y}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中，

$$\boldsymbol{n}_1=\{2,0,6\},\quad \boldsymbol{n}_2=\{0,2,6\},\quad \boldsymbol{v}=\{1,0,3\}\times\{0,1,3\}=\{-3,-3,1\}.$$

于是，切线方程为 $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$ 或 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$；

法平面方程为 $-3(x-1)-3(y-1)+(z-3)=0$,

即 $3x+3y-z=3$.

【3532】 $x^2+y^2+z^2=6$, $x+y+z=0$；在点 $M(1,-2,1)$.

提示 曲线在该点的切向量为 $\boldsymbol{v}=\{1,-2,1\}\times\{1,1,1\}$.

解 $F_1=x^2+y^2+z^2-6=0$, $F_2=x+y+z=0$.

$$\boldsymbol{n}_1=2\{1,-2,1\},\quad \boldsymbol{n}_2=\{1,1,1\},\quad \boldsymbol{v}=\{1,-2,1\}\times\{1,1,1\}=-3\{1,0,-1\}.$$

于是，切线方程为 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1},\\ y=-2;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+z=2,\\ y+2=0;\end{cases}$

法平面方程为 $(x-1)-(z-1)=0$ 或 $x-z=0$.

【3533】 在曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上求一点，此点的切线是平行于平面 $x+2y+z=4$ 的.

解 $\boldsymbol{v}=\{1,2t,3t^2\}$，平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,2,1\}$. 按题设，应有

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=1+4t+3t^2=0.$$

解之，得 $t=-1$ 或 $t=-\dfrac{1}{3}$. 于是，所求的点为 $M_1(-1,1,-1)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$.

【3534】 证明：螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 的切线与 Oz 轴形成定角.

证明思路 注意切线与 Oz 轴形成之角 γ 的余弦为

$$\cos\gamma=\frac{\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}},$$

将$\frac{dx}{dt}=-a\sin t$, $\frac{dy}{dt}=a\cos t$, $\frac{dz}{dt}=b$代入上式,命题即可获证.

证 $\frac{dx}{dt}=-a\sin t$, $\frac{dy}{dt}=a\cos t$, $\frac{dz}{dt}=b$. 于是,切线与Oz轴形成之角γ的余弦为

$$\cos\gamma=\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

由于$\cos\gamma$为常数,故知切线与Oz轴形成定角.

【3535】 证明:曲线$x=ae^t\cos t, y=ae^t\sin t, z=ae^t$与锥面$x^2+y^2=z^2$的各母线相交的角度相同.

证明思路 注意锥面母线的方向向量为$\boldsymbol{v}_1=\{x,y,z\}$,曲线在任一点的切向量为

$$\boldsymbol{v}_2=\{x-y,x+y,z\}.$$

只要证明$\cos(\boldsymbol{v}_1\widehat{,}\boldsymbol{v}_2)$为一常数.

证 圆锥$x^2+y^2=z^2$的顶点在原点,过圆锥上任一点$P(x,y,z)$的母线也过原点. 因此,母线的方向向量为$\boldsymbol{v}_1=\{x,y,z\}$.

曲线在点P的切向量为

$$\boldsymbol{v}_2=\{x',y',z'\}=\left\{ae^t(\cos t-\sin t),ae^t(\sin t+\cos t),ae^t\right\}=\{x-y,x+y,z\}.$$

注意到$x^2+y^2=z^2$,即得

$$\cos(\boldsymbol{v}_1\widehat{,}\boldsymbol{v}_2)=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{x(x-y)+y(x+y)+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}}=\frac{2z^2}{\sqrt{2z^2}\sqrt{3z^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}},$$

于是,交角相同.

【3536】 证明:斜驶线 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}$ (k=常数),

(其中φ—地球上点的经度,ψ—地球上点的纬度)与地球的一切子午线相交成定角.

解 取直角坐标系如下:赤道平面为Oxy平面,球心为坐标原点,Ox轴正向过0°子午线,Oz轴正向过北极,并取$Oxyz$坐标系为右手系.

下面我们先确定斜驶线和子午线在直角坐标系中的方程. 为此,假定讨论地球上的点的经度为$\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$,纬度为$\psi(-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2})$,则它在上述坐标系下的坐标为

$$\begin{cases}x=R\cos\psi\cos\varphi,\\y=R\cos\psi\sin\varphi,\\z=R\sin\psi,\end{cases}$$

其中R为地球半径.

对$\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2})=e^{k\varphi}$的两端微分,得

$$\frac{d\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}=ke^{k\varphi}d\varphi=k\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)d\varphi.$$

于是, $$\frac{d\varphi}{d\psi}=\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)k\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1}=\left[k\sin\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)\right]^{-1}=\frac{1}{k\cos\psi}.$$

今将斜驶线方程看作决定φ为ψ的隐函数. 因此,对斜驶线来说,在(φ_0,ψ_0)点,有

$$\frac{dx}{d\psi}=-R\sin\psi_0\cos\varphi_0-R\cos\psi_0\sin\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi}=-R\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k}\right),$$

$$\frac{dy}{d\psi}=-R\sin\psi_0\sin\varphi_0+R\cos\psi_0\cos\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi}=-R\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k}\right),$$

$$\frac{dz}{d\psi}=R\cos\psi_0.$$

于是,可取斜驶线切向量

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k},\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k},-\cos\psi_0\right\}.$$

当 φ 为常数时即得子午线,故其参数方程为 $\begin{cases}x=R\cos\psi\cos\varphi_0,\\y=R\cos\psi\sin\varphi_0,\\z=R\sin\psi.\end{cases}$

于是,子午线在点 (φ_0,ψ_0) 的切向量为

$$\boldsymbol{v}_2=\{\sin\psi_0\cos\varphi_0,\sin\psi_0\sin\varphi_0,-\cos\psi_0\}.$$

从而得

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2})=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k_2}}}=\text{常数},$$

即斜驶线与子午线相交成定角.

【3537】 求曲线 $z=f(x,y),\quad \dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\sin\alpha}$

(其中 f 为可微函数)在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的切线与 Oxy 平面所成角的正切.

解题思路 将曲线看作由参数方程

$$x=x,\ y=\varphi(x)=y_0+(x-x_0)\tan\alpha,z=\psi(x)=f[x,\varphi(x)]$$

给出,则曲线上 M_0 点的切线与 Oxy 平面所成角 φ 的正切为

$$\tan\varphi=\frac{\psi'(x_0)}{\sqrt{1+\varphi'^2(x_0)}}.$$

解 解法 1:

将曲线看作由参数方程 $x=x,\ y=\varphi(x)=y_0+(x-x_0)\tan\alpha,z=\psi(x)=f[x,\varphi(x)]$ 给出,则切向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}=\{1,\tan\alpha,f'_x[x_0,\varphi(x_0)]+f'_y[x_0,\varphi(x_0)]\varphi'(x_0)\}\\&=\{1,\tan\alpha,f'_x(x_0,y_0)+\tan\alpha f'_y(x_0,y_0)\}.\end{aligned}$$

于是,曲线上点 M_0 的切线与 Oxy 平面所成角 φ 的正切为

$$\begin{aligned}\tan\varphi&=\frac{\psi'(x_0)}{\sqrt{1+\varphi'^2(x_0)}}=\frac{f'_x(x_0,y_0)+\tan\alpha f'_y(x_0,y_0)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\\&=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha.\end{aligned}$$

解法 2:

将曲线看作两条曲线的交线,则所给曲线在点 M_0 的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}f'_y(x_0,y_0)&-1\\-\frac{1}{\sin\alpha}&0\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}-1&f'_x(x_0,y_0)\\0&\frac{1}{\cos\alpha}\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}f'_x(x_0,y_0)&f'_y(x_0,y_0)\\\frac{1}{\cos\alpha}&-\frac{1}{\sin\alpha}\end{vmatrix}},$$

即

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{z-z_0}{f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha},$$

因此,切线与 Oxy 平面所成角 φ 的正切为

$$\tan\varphi=\frac{f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

【3538】 求函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

在点 $M(1,2,-2)$ 沿曲线 $x=t,\quad y=2t^2,\quad z=-2t^4$

在此点的切线方向的导数.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

在点 $M(1,2,-2)$ 它们的值分别为 $\frac{8}{27}$，$-\frac{2}{27}$，$\frac{2}{27}$.

又曲线在该点的切线的方向余弦为 $\frac{1}{9}$，$\frac{4}{9}$，$-\frac{8}{9}$. 于是，所求的导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\frac{8}{27}\ \frac{1}{9}+\left(-\frac{2}{27}\right)\frac{4}{9}+\frac{2}{27}\left(-\frac{8}{9}\right)=-\frac{16}{243}.$$

写出下列曲面上点 M_0 的切平面和法线方程：

【3539】 $z=x^2+y^2$；在点 $M_0(1,2,5)$.

解 当曲面由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出时，其法向量为 $\boldsymbol{n}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$，特别是曲面由显式方程 $z=f(x,y)$ 给出时，其法向量为 $\boldsymbol{n}=\{f'_x,f'_y,-1\}$. 本题中，$\boldsymbol{n}=\{2x,2y,-1\}_{M_0}=\{2,4,-1\}$.
于是，切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,\quad 或\quad 2x+4y-z=5;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}.$$

【3540】 $x^2+y^2+z^2=169$；在点 $M_0(3,4,12)$.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-169=0$，则在点 M_0 处 $\vec{n}=\{2x,2y,2z\}_{M_0}=\{6,8,24\}=2\{3,4,12\}$.
于是，切平面方程为

$$3(x-3)+4(y-4)+12(z-12)=0\quad 或\quad 3x+4y+12z=169;$$

法线方程为

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}\quad 或\quad \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}.$$

【3541】 $z=\arctan\frac{y}{x}$；在点 $M_0\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.

解 $\boldsymbol{n}=\left\{\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},-1\right\}_{M_0}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right\}$.
于是，切平面方程为

$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\quad 或\quad z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y);$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}.$$

【3542】 $ax^2+by^2+cz^2=1$；在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

解 $\boldsymbol{n}=2\{ax_0,by_0,cz_0\}$.
于是，切平面方程为 $\quad ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0$，
注意到 $ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1$，上述方程即化为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=1;$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

【3543】 $z=y+\ln\frac{x}{z}$；在点 $M_0(1,1,1)$.

解 $F(x,y,z)=y+\ln x-\ln z-z=0$.

$$\boldsymbol{n}=\left\{\frac{1}{x},1,-\frac{1}{z}-1\right\}_{M_0}=\{1,1,-2\}.$$

于是，切平面方程为

$$(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0\quad 或\quad x+y-2z=0;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

【3544】 $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$；在点 $M_0(2,2,1)$.

解 $F(x,y,z)=2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8$,

$$\boldsymbol{n}=\left\{\frac{1}{z}2^{\frac{x}{z}}\ln2,\frac{1}{z}2^{\frac{y}{z}}\ln2,(x2^{\frac{x}{z}}+y2^{\frac{y}{z}})\left(-\frac{1}{z^2}\ln2\right)\right\}_{M_0}=4\ln2\{1,1,-4\}.$$

于是,切平面方程为

$$(x-2)+(y-2)-4(z-1)=0 \quad 或 \quad x+y-4z=0;$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}.$$

【3545】 $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=b\cos\psi\sin\varphi$, $z=c\sin\psi$；在点 $M_0(\varphi_0,\psi_0)$.

解题思路 当曲面由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

给出时,曲面上分别令 $u=u_0,v=v_0$ 得到的两条曲线的切向量分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right\},\qquad \boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right\},$$

则切面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2.$$

本题及 3546 题、3547 题均可按此思路先求出 $\boldsymbol{n}$,从而,问题即易获解.

解 当曲面由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

给出时,曲面上分别令 $u=u_0,v=v_0$ 得到的两条曲线的切向量分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right\},\qquad \boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right\},$$

则切面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial u}\\\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}\\\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中,

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi},\frac{\partial y}{\partial\varphi},\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right\}_{M_0}=\{-a\cos\psi_0\sin\varphi_0,b\cos\psi_0\cos\varphi_0,0\}=\cos\psi_0\{-a\sin\varphi_0,b\cos\varphi_0,0\},$$

$$\boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial\psi},\frac{\partial y}{\partial\psi},\frac{\partial z}{\partial\psi}\right\}_{M_0}=\{-a\sin\psi_0\cos\varphi_0,-b\sin\psi_0\sin\varphi_0,c\cos\psi_0\},$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=abc\left\{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a},\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b},\frac{\sin\psi_0}{c}\right\}.$$

于是,切平面方程为

$$\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}(x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0)+\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}(y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0)+\frac{\sin\psi_0}{c}(z-c\sin\psi_0)=0,$$

即

$$\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1;$$

法线方程为

$$\frac{x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}}=\frac{y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}}=\frac{z-c\sin\psi_0}{\frac{\sin\psi_0}{c}},$$

即

$$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\csc\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\csc\psi_0-c}{ab}.$$

【3546】 $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi,z=r\cot\alpha$;在点 $M_0(\varphi_0,r_0)$.

解 $\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi},\frac{\partial y}{\partial\varphi},\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right\}_{M_0}=r_0\{-\sin\varphi_0,\cos\varphi_0,0\}$, $\boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial r},\frac{\partial y}{\partial r},\frac{\partial z}{\partial r}\right\}_{M_0}=\{\cos\varphi_0,\sin\varphi_0,\cot\alpha\}$,

$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=r_0\{\cos\varphi_0\cot\alpha,\sin\varphi_0\cot\alpha,-1\}$.

于是,切平面方程为

$$\cos\varphi_0\cot\alpha(x-r_0\cos\varphi_0)+\sin\varphi_0\cot\alpha(y-r_0\sin\varphi_0)-(z-r_0\cot\alpha)=0.$$

即 $$x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0-z\tan\alpha=0;$$

法线方程为 $$\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0\cot\alpha}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0\cot\alpha}=\frac{z-r_0\cot\alpha}{-1}$$

即 $$\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\frac{z-r_0\cot\alpha}{-\tan\alpha}.$$

【3547】 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$;在点 $M_0(u_0,v_0)$.

解 $\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right\}_{M_0}=\{\cos v_0,\sin v_0,0\}$, $\boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right\}_{M_0}=\{-u_0\sin v_0,u_0\cos v_0,a\}$,

$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\{a\sin v_0,-a\cos v_0,u_0\}$.

于是,切平面方程为

$$a\sin v_0(x-u_0\cos v_0)-a\cos v_0(y-u_0\sin v_0)+u_0(z-av_0)=0,$$

即 $$ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0;$$

法线方程为 $$\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}.$$

【3548】 求曲面 $x=u+v, y=u^2+v^2, z=u^3+v^3$ 的切平面当切点 $M(u,v)(u\neq v)$无限接近于曲面的边界线$u=v$上的点 $M_0(u_0,v_0)$时的极限位置.

解 $\boldsymbol{n}(u,v)=\{1.2u,3u^2\}\times\{1,2v,3v^2\}=(v-u)\{6uv,-3(u+v),2\}$.

则 $\boldsymbol{n}$ 方向上的单位向量为 $$\boldsymbol{n}^\circ(u,v)=\left\{\frac{6uv}{l},-\frac{3(u+v)}{l},\frac{2}{l}\right\},$$

其中 $l=\sqrt{36u^2v^2+9(u+v)^2+4}$. 于是,

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ v\to v_0}}\boldsymbol{n}^\circ=\left\{\frac{6u_0^2}{l_0},-\frac{6u_0}{l_0},\frac{2}{l_0}\right\},$$

其中 $l_0=\sqrt{36u_0^4+36u_0^2+4}$. 而 $M_0(u_0,v_0)=(2u_0,2u_0^2,2u_0^3)$,故知切平面在 M_0 点的极限位置为

$$3u_0^2x-3u_0y+z=3u_0^2(2u_0)-3u_0(2u_0^2)+2u_0^3=2u_0^3,$$

或 $$\frac{3x}{u_0}-\frac{3y}{u_0^2}+\frac{z}{u_0^3}=2.$$

【3549】 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ 上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

解 $\boldsymbol{n}=\{2(x+y+z),2(x+2y+2z),2(x+2y+3z)\}$ 当

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\ x+2y+2z=0,\\ x+2y+3z=\lambda.\end{cases}$$

时,$\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$ 平行,即切平面平行于 Oxy 平面. 解之,得 $x=0$, $y=-\lambda$, $z=\lambda$. 将求得的 x,y,z 值代入所给的曲面方程,得$\lambda=\pm2\sqrt{2}$. 于是,切平面平行于 Oxy 坐标面的切点为$(0,\pm2\sqrt{2},\mp2\sqrt{2})$. 同法可求得切平面平行于 Oyz 坐标面及 Oxz 坐标面的诸切点分别为$(\pm4,\mp2,0)$及$(\pm2,\mp4,\pm2)$.

【3550】 在椭球面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上怎样的点,椭球面的法线与坐标轴成等角?

解 $\boldsymbol{n}=2\left\{\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right\}$. 按题设,应有

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y}{b^2}}{l}=\frac{\frac{z}{c^2}}{l}\quad\left(l=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\right),\quad 即\quad \frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}=\lambda.$$

将上式代入椭球面方程,得 $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

于是,所求的点为 $x=\pm\frac{a^2}{d}$, $y=\pm\frac{b^2}{d}$, $x=\pm\frac{c^2}{d}$,其中$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

【3551】 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面.

解 $\boldsymbol{n}=2\{x,2y,3z\}$. 按题设,应有

$$x=\lambda,\quad 2y=4\lambda,\quad 3z=6\lambda,$$

解之,得 $x=\lambda, y=2\lambda, z=2\lambda$. 将它们代入方程 $x^2+2y^2+3z^2=21$, 得 $\lambda=\pm1$, 故切点为$(\pm1,\pm2,\pm2)$. 于是,所求的切平面方程为

$$(x\mp1)+4(y\mp2)+6(z\mp2)=0,$$

即

$$x+4y+6z=\pm21.$$

【3552】 证明:曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 的切平面与坐标面形成体积一定的四面体.

证明思路 *在曲面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 可求得曲面在该点的切平面方程为*

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0,$$

它与各坐标面的交点为 $A(3x_0,0,0)$, $B(0,3y_0,0)$, 及 $C(0,0,3z_0)$. 注意到各坐标轴的垂直关系,易知以 A、B、C、O 诸点为顶点的四面体的体积为一个常数,命题获证.

证 在曲面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0,$$

它与各坐标面的交点为 $A(3x_0,0,0)$, $B(0,3y_0,0)$, $C(0,0,3z_0)$. 注意到各坐标轴的垂直关系,即知以 A、B、C、O 诸点为顶点的四面体的体积为

$$V_{ABCO}=\frac{1}{3}OC\left(\frac{1}{2}OA\cdot OB\right)=\frac{1}{6}3z_0 3x_0 3y_0=\frac{9}{2}x_0y_0z_0=\frac{9}{2}a^3,$$

它为一个常数,本题获证.

【3553】 证明:曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 的切平面在坐标轴上割下的诸线段,其和为常量.

证明思路 *在曲面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 可求得曲面在该点的切平面方程为*

$$\sqrt{y_0z_0}(x-x_0)+\sqrt{x_0z_0}(y-y_0)+\sqrt{x_0y_0}(z-z_0)=0,$$

它在各坐标轴上所割下的诸线段分别为 $\sqrt{ax_0}$, $\sqrt{ay_0}$ 及 $\sqrt{az_0}$, 易知其和为一个常数,命题获证.

证 在曲面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即

$$\sqrt{y_0z_0}(x-x_0)+\sqrt{x_0z_0}(y-y_0)+\sqrt{x_0y_0}(z-z_0)=0.$$

此切面在坐标轴上所割下的诸线段分别为 $\sqrt{ax_0}$, $\sqrt{ay_0}$, $\sqrt{az_0}$, 其和为

$$\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\,\sqrt{a}=a,$$

它是常数,本题获证.

【3554】 证明:锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的切平面经过其顶点.

证明思路 *在锥面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$(顶点$(0,0,0)$除外), 可求得锥面在该点的切平面方程为*

$$z=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y,$$

它显然通过锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的顶点$(0,0,0)$.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)$. 于是,锥面在任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$z-z_0=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0),$$

化简整理得

$$z=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y,$$

它显然通过锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的顶点$(0,0,0)$.

【3555】 证明:旋转面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ $(f'\neq 0)$的法线与旋转轴相交.

证明思路 *在旋转面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，其中 $z_0=f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})(x_0^2+y_0^2\neq 0)$. 可求得曲面在该点的法线方程为*

$$\frac{x-x_0}{x_0 f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}=\frac{y-y_0}{y_0 f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}=\frac{z-z_0}{-\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

显然，法线通过 Oz 轴上的点 $\left(0,0,f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})+\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}\right)$,

即法线与旋转轴——Oz 轴相交.

证 在旋转面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，其中 $z_0=f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})$，则曲面在该点的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right\}_{P_0}=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\left\{x_0 f',y_0 f',-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right\}.$$

于是，法线方程为 $$\frac{x-x_0}{x_0 f'}=\frac{y-y_0}{y_0 f'}=\frac{z-z_0}{-\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

显然，法线通过 Oz 轴上的点 $\left(0,0,f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})+\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}\right)$,

即法线和 Oz 轴相交.

【3556】 求椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在坐标面上的投影.

解 先考虑椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在 Oxy 平面上的投影. 该投影即通过所给曲面上的每一点向 Oxy 平面作垂线所得到的垂足的全体，它是 Oxy 平面上的一个区域，这个区域的边界由曲面上这样的点的投影构成:这一点向 Oxy 平面所作的垂线在它的切平面内(这里用到了椭球面的凸性)，即该点的法线与 Oxy 平面平行. 注意到该点的法向量为 $\{2x-y,\ 2y-x,\ 2z\}$. 因此，该点的坐标满足

$$\begin{cases}2z=0,\\ x^2+y^2+z^2-xy=1.\end{cases}$$

这些点的投影为 $$\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2-xy=1,\end{cases}$$

它即椭球面在 Oxy 平面上投影的边界.

同法可考虑切平面与 Oxz 平面垂直，则有 $2y-x=0$. 因此，对 Oxz 平面投影为边界点的椭球面上的点应满足方程

$$\begin{cases}2y-x=0,\\ x^2+y^2+z^2-xy=1.\end{cases}$$

这是椭球面与平面的交线，将它改写为柱面与平面的交线

$$\begin{cases}2y-x=0,\\ \dfrac{3x^2}{4}+z^2=1.\end{cases}$$

于是，椭球面在 Oxz 平面上投影的边界由方程

$$\begin{cases}y=0,\\ \dfrac{3x^2}{4}+z^2=1\end{cases}$$

确定.

同法可确定椭球面在 Oyz 平面上投影的边界由方程

$$\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{3y^2}{4}+z^2=1\end{cases}$$

确定.

于是，椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在 Oxy 平面上的投影为圆：$x^2+y^2-xy\leqslant 1$，$z=0$；在 Oyz 平面上的投影为椭圆：$\frac{3}{4}y^2+z^2\leqslant 1$，$x=0$；在 Oxz 平面上的投影为椭圆 $\frac{3}{4}x^2+z^2\leqslant 1$，$y=0$.

【3557】 分正方形 $\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 为直径不大于 δ 的有限个部分 σ. 若曲面

$$z=1-x^2-y^2$$

在属于同一部分 σ 的任何两点 $P(x,y)$ 及 $P_1(x_1,y_1)$ 的法线方向相差小于 $1°$，求数 δ 的上界.

解 记曲面在点 $P(x,y)$ 及 $P_1(x_1,y_1)$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{n}_1$，则 $\boldsymbol{n}=\{2x,2y,1\}$，$|\boldsymbol{n}|\geqslant 1$，$\boldsymbol{n}_1=\{2x_1,2y_1,1\}$，$|\boldsymbol{n}_1|\geqslant 1$，且有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1=\{2(y-y_1),2(x_1-x),4(xy_1-x_1y)\},$$

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1})=\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_1|}\leqslant|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1|=2\sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2+4(xy_1-x_1y)^2}.$$

注意到

$$(xy_1-x_1y)^2=[x(y_1-y)+y(x-x_1)]^2\leqslant 2[x^2(y_1-y)^2+y^2(x-x_1)^2]\leqslant 2[(y-y_1)^2+(x-x_1)^2],$$

并记 $\rho=\sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2}$，即有

$$(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1})\leqslant 2\sqrt{\rho^2+4\cdot 2\rho^2}=6\rho.$$

当 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1})<1°$ 时，$\varphi\approx\sin(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1})$. 于是，要 $\varphi<\frac{\pi}{180}$，只要 $6\rho<\frac{\pi}{180}$，即 $\rho<\frac{\pi}{1080}\approx 0.003$ 即可. 从而得 $\delta<0.003$.

【3558】 设

$$z=f(x,y),\quad 其中(x,y)\in D \tag{1}$$

为曲面的方程，$\varphi(P_1,P)$ 为曲面(1)在点 $P(x,y)\in D$ 及 $P_1(x_1,y_1)\in D$ 二点的法线之间的夹角.

证明：若 D 为有界闭区域，函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内具有有界的二阶导数，则李雅普诺夫不等式

$$\varphi(P_1,P)<C\rho(P_1,P) \tag{2}$$

成立. 其中 C 为常数，$\rho(P_1,P)$ 为点 P 与 P_1 之间的距离

证 本题应加区域是凸的这个条件，否则结论就不成立. 例如，

$$z=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ y^3, & y>0,\ x\geqslant y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ -y^3, & y>0,\ x\leqslant -y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$$

如图 6.30 所示，函数 z 在单位圆内缺一个角的闭区域内定义，且有连续的二阶偏导数，取 $P_n(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n})$ 与 $P'_n(-\frac{1}{n^3},\frac{1}{n})$，则

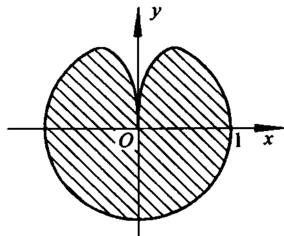


图 6.30

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(P_n)=\{0,3y^2,-1\}_{P_n}=\left\{0,\frac{3}{n^2},-1\right\},$$

$$\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{n}(P'_n)=\{0,-3y^2,-1\}_{P'_n}=\left\{0,-\frac{3}{n^2},-1\right\},$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'=\left\{-\frac{6}{n^2},0,0\right\},$$

$$\sin\varphi_n=\frac{|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}'|}=\frac{\frac{6}{n^2}}{1+\frac{9}{n^4}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

又因 $\rho_n(P_n,P'_n)=\frac{2}{n^3}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}\ \frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\frac{6}{n^2}}{1+\frac{9}{n^4}}}{\dfrac{2}{n^3}}=+\infty,$$

故不存在常数 C,使 $\varphi_n<C\rho_n$

下面证明:当 D 为凸的有界闭区域时,不等式(2)成立.

由 3255 题知:当 $f(x,y)$在 D 内有二阶连续的偏导数时,$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$在 D 内是二元连续的.又因 D 是有界闭区域,故$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$在 D 上有界,记

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|<M,\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|<M.$$

又由 3254 题的证明过程可知:当 D 是凸域,$f(x,y)$有有界二阶偏导数时,对 D 中任意两点 P 及 P_1,$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$满足利普希茨条件,即存在常数 L,使有

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right|<L\rho(P_1,P),$$

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right|<L\rho(P_1,P).$$

由

$$\boldsymbol{n}(P_1)=\left\{\frac{\partial f(P_1)}{\partial x},\frac{\partial f(P_1)}{\partial y},-1\right\}\quad 及\quad \boldsymbol{n}(P)=\left\{\frac{\partial f(P)}{\partial x},\frac{\partial f(P)}{\partial y},-1\right\}$$

知:对于 $\varphi=\varphi(P_1,P)$有下列不等式

$$\begin{aligned}\sin^2\varphi&=\frac{|\boldsymbol{n}(P_1)\times\boldsymbol{n}(P)|^2}{|\boldsymbol{n}(P_1)|^2|\boldsymbol{n}(P)|^2}\leqslant|\boldsymbol{n}(P_1)\times\boldsymbol{n}(P)|^2\\&=\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\ \frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\ \frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2\\&<L^2\rho^2+L^2\rho^2+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}-\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2\\&<2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2=2L^2\rho^2(1+2M^2).\end{aligned}$$

于是,$\sin\varphi<C_1\rho(P_1,P)$,其中 $C_1^2=2L^2(1+2M^2)$,从而得

$$\varphi(P_1,P)<\frac{\pi}{2}\sin\varphi^{*)}<\frac{\pi}{2}C_1\rho(P_1,P)=C\rho(P_1,P).$$

其中 $C=\frac{\pi}{2}C_1$ 为常数,本题获证.

*) 利用 1290 题的结果.

【3559】 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与曲面 $bz=xy$ 在公共点$M_0(x_0,y_0,z_0)$相交成怎样的角?

提示 先求出二曲面在 M_0 点的法向量 $\boldsymbol{n}_1$及 $\boldsymbol{n}_2$.

解 二曲面在 M_0 点的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\{y_0,x_0,-b\}\quad 及\quad \boldsymbol{n}_2=\{2x_0,2y_0,0\}.$$

于是,交角 φ 满足

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2x_0y_0+2x_0y_0+0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+b^2}\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}}=\frac{4bz_0}{\sqrt{a^2+b^2}\ 2a}=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

【3560】 证明:球坐标的坐标曲面 $x^2+y^2+z^2=r^2$,$y=x\tan\varphi$,$x^2+y^2=z^2\tan^2\theta$ 两两正交.

证明思路 各曲面在其交点 $P(x,y,z)$处的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=\{2x,2y,2z\},\quad \boldsymbol{n}_2=\{\tan\varphi,-1,0\}\quad \boldsymbol{n}_3=\{2x,2y,-2z\tan^2\theta\}.$$

只要注意到 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\quad \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3=0,\quad \boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3=0,$

命题即获证.

证 各曲面在其交点 $P(x,y,z)$ 处的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=\{2x,2y,2z\},\quad \boldsymbol{n}_2=\{\tan\varphi,-1,0\},\quad \boldsymbol{n}_3=\{2x,2y,-2z\tan^2\theta\}.$$

由于

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=2x\tan\varphi-2y=2y-2y=0,$$

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3=4x^2+4y^2-4z^2\tan^2\theta=4z^2\tan^2\theta-4z^2\tan^2\theta=0,$$

$$\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3=2x\tan\varphi-2y=0,$$

故知这些曲面在其交点处分别两两正交.

【3561】 证明:球面 $x^2+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2+z^2=2by$, $x^2+y^2+z^2=2cz$,形成三重正交坐标系.

提示 仿3560题的证明思路.

证 设球 $x^2+y^2+z^2=2ax$ 与球 $x^2+y^2+z^2=2by$ 交于 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点,则它们在 P_0 点的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\{2(x_0-a),2y_0,2z_0\},\quad \boldsymbol{n}_2=\{2x_0,2(y_0-b),2z_0\}.$$

由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2&=4[x_0(x_0-a)+y_0(y_0-b)+z_0^2]=2[2x_0^2+2y_0^2+2z_0^2-2ax_0-2by_0]\\&=2[(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2ax_0)+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2by_0)]=0,\end{aligned}$$

故知这二球面在其交点处正交,同法可证其他球面的两两正交性.

【3562】 当 $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$, $\lambda=\lambda_3$ 时,经过每一点 $M(x,y,z)$ 有三个二次曲面:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=-1\quad(a>b>c>0).$$

证明:这些曲面是正交的.

证 先证 $\lambda_i(i=1,2,3)$ 的存在性.考虑 λ^2 的多项式

$$F(\lambda^2)=x^2(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)+y^2(a^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)+z^2(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)+(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2).$$

显然有

$$F(a^2)=x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)>0,\qquad F(b^2)=y^2(a^2-b^2)(c^2-b^2)<0,$$

$$F(c^2)=z^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)>0,\qquad \lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda^2)=-\infty.$$

因此,$F(\lambda^2)=0$ 在 $(a^2,+\infty)$,(b^2,a^2) 及 (c^2,b^2) 内各有一根,记为 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2$.但 $F(\lambda^2)$ 是关于 λ^2 的三次多项式,因此,也仅有三个实根 $\lambda_i^2(i=1,2,3)$,且知 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j;\ i,j=1,2,3)$.由 $F(\lambda_i^2)=0$ 不难推得

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2}=-1\quad(i=1,2,3).$$

下面再证明这三个二次曲面是两两正交的.由于

$$\boldsymbol{n}_i=\left\{\frac{2x}{a^2-\lambda_i^2},\frac{2y}{b^2-\lambda_i^2},\frac{2z}{c^2-\lambda_i^2}\right\}\quad(i=1,2,3),$$

及当 $i\neq j$ 时,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{n}_j&=\frac{4x^2}{(a^2-\lambda_i^2)(a^2-\lambda_j^2)}+\frac{4y^2}{(b^2-\lambda_i^2)(b^2-\lambda_j^2)}+\frac{4z^2}{(c^2-\lambda_i^2)(c^2-\lambda_j^2)}\\&=\frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\left[\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2}\right)-\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_j^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_j^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_j^2}\right)\right]\\&=\frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}[(-1)-(-1)]=0,\end{aligned}$$

故本题获证.

【3563】 求函数 $u=x+y+z$ 沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的外法线方向的导数.在球面上怎样的点,函数 u 的上述法向导数有:(1)最大值,(2)最小值,(3)等于零?

提示 易得 $\dfrac{\partial u}{\partial n}=x_0+y_0+z_0$.

(1) 利用1294题的结果,易知所求的点为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(2) 同(1)，所求的点为$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(3) 所求的点为由方程 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 所确定的解(x,y,z).

解 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=1$，则在点 M_0 处球面的外法线单位向量为$\left\{\frac{x_0}{r_0},\frac{y_0}{r_0},\frac{z_0}{r_0}\right\}=\{x_0,y_0,z_0\}$. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}=\{1,1,1\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}=x_0+y_0+z_0.$$

(1) 利用 1294 题的结果，得

$$x_0+y_0+z_0=1x_0+1y_0+1z_0\leqslant\sqrt{3}\ \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{3}.$$

当 $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$时，上述等式成立，此点恰在球面上. 因此，在点$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$处$\frac{\partial u}{\partial n}$取得最大值.

(2) 同法可得
$$-(x_0+y_0+z_0)=(-1)x_0+(-1)y_0+(-1)z_0\leqslant\sqrt{3},$$
或
$$x_0+y_0+z_0\geqslant-\sqrt{3}.$$
故在点$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$处 $\frac{\partial u}{\partial n}$取得最小值.

(3) 当 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 时$\frac{\partial u}{\partial n}=0$. 因此，所求的点为由方程

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

确定的解(x,y,z)，它在单位球面与过圆心的平面 $x+y+z=0$ 的交线——圆上面.

【3564】 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 沿椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$的外法线方向的导数.

解 $\boldsymbol{n}=\left\{\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right\}$，此法向量的单位向量为$\boldsymbol{n}^\circ=\left\{\frac{x_0}{a^2\Delta},\frac{y_0}{b^2\Delta},\frac{z_0}{c^2\Delta}\right\}$，其中 $\Delta=\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}$.

于是，
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0}=\frac{x_0}{a^2\Delta}2x_0+\frac{y_0}{b^2\Delta}2y_0+\frac{z_0}{c^2\Delta}2z_0=\frac{2}{\Delta}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=\frac{2}{\Delta}=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

【3565】 设$\frac{\partial u}{\partial n}$知$\frac{\partial v}{\partial n}$为函数 u 和 v 在曲面 $F(x,y,z)=0$ 上的点的法向导数，证明：

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

提示 由方向导数的计算公式命题易获证.

证
$$\frac{\partial}{\partial n}(uv)=\frac{\partial}{\partial x}(uv)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}(uv)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial z}(uv)\cos\gamma$$
$$=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

求含一个参变量的平面曲线族的包络线：

【3566】 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ($p=$常数).

解题思路 令 $f(x,y,\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p$. 由 $f(x,y,\alpha)=0$ 及 $f'_\alpha(x,y,\alpha)=0$ 消去 α，并注意原曲线没有奇点，且所得方程也不是原曲线族中某一支的方程，因而它就是包络线方程.

以下各题(3567～3580)说明所得的方程为所求的包络线(或包络面)方程的理由均与 3566 题相同.

解
$$\begin{cases}f(x,y,\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,\\f'_\alpha(x,y,\alpha)=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0.\end{cases}$$

消去 α，得
$$x^2+y^2=p^2. \tag{1}$$

由于原曲线没有奇点，且(1)也不是原曲线族中的某一支，故方程(1)为原曲线族的包络线方程.

【3567】 $(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}$.

解 $\begin{cases}(x-a)^2+y^2-\frac{a^2}{2}=0,\\ 2(x-a)+a=0.\end{cases}$

消去 a，得 $y=\pm x$，同 3566 题的理由可知，它是包络线方程.

【3568】 $y=kx+\frac{a}{k}$ (a=常数).

解 $\begin{cases}kx-y+\frac{a}{k}=0,\\ x-\frac{a}{k^2}=0.\end{cases}$

消去 k，得 $y^2=4ax$，同 3566 题的理由可知，它是包络线方程.

【3569】 $y^2=2px+p^2$.

解 $\begin{cases}2px-y^2+p^2=0,\\ x+p=0.\end{cases}$

消去 p，得 $x^2+y^2=0$，它仅为一点(0,0). 于是，原曲线族无包络线.

【3570】 设有长为 l 的线段，其两端点沿坐标轴滑动，求如此产生的线段族的包络线.

解 如图 6.31 所示，直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

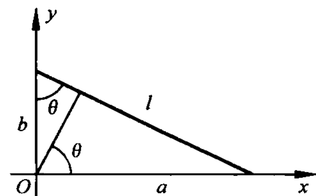


图 6.31

但是 $a=l\sin\theta$, $b=l\cos\theta$，所以，

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=l. \tag{1}$$

对 θ 求导数，得

$$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta=0 \quad 或 \quad \frac{x}{\sin^3\theta}=\frac{y}{\cos^3\theta}. \tag{2}$$

由(1),(2)消去 θ，得 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$，同 3566 题的理由可知，它是包络线方程.

【3571】 求面积 S 为常数的椭圆族$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的包络线.

解 由题设 $\pi ab=S$，得 $a=\frac{S}{\pi b}$，且

$$\frac{\pi^2b^2x^2}{S^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

对 b 求导数，得

$$\frac{2\pi^2bx^2}{S^2}-\frac{2y^2}{b^3}=0. \tag{2}$$

由(2)式 $b^4=\frac{y^2S^2}{\pi^2x^2}$或 $b^2=\pm\frac{yS}{\pi x}$，再代入(1)，得$\pm\frac{\pi xy}{S}\pm\frac{\pi xy}{S}=1$，即

$$|xy|=\frac{S}{2\pi},$$

同 3566 题的理由可知，它是包络线方程.

【3572】 炮弹在真空中以初速度 v_0 射出，当投射角 α 在竖垂平面中变化时，求炮弹轨道的包络线.

解 炮弹轨道方程为

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{1}$$

对 α 求导数，得

$$0=\frac{x}{\cos^2\alpha}-\frac{gx^2\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha}. \tag{2}$$

由(2)式得 $\tan\alpha=\frac{v_0^2}{xg}$. 代入(1)式,得

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=x\frac{v_0^2}{xg}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\frac{v_0^2}{x^2g^2}\right)=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2},$$

同 3566 题的理由可知,它是包络线方程.

【3573】 证明:平面曲线的法线的包络线是此曲线的渐屈线.

提示 可仅就由显式 $y=f(x)$ 所给出的平面曲线加以证明,并注意 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 的法线方程为 $(X-x)+y'(Y-y)=0$.

证 这里我们仅就由显式 $y=f(x)$ 所给出的平面曲线情形加以证明.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 的法线方程为

$$(X-x)+y'(Y-y)=0. \tag{1}$$

对 x 求导数,得

$$-1+y''(Y-y)-y'^2=0 \quad 或 \quad y''(Y-y)=1+y'^2. \tag{2}$$

由(1),(2)解得

$$\begin{cases}X=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''},\\ Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''},\end{cases}$$

此即 $y=f(x)$ 的渐屈线方程(参看第二章 § 14 前言 3°).

同 3566 题的理由可知,它是平面曲线的法线的包络线方程.

【3574】 研究下列曲线族的判别曲线的性质(c 是参变量):

(1) 立方抛物线 $y=(x-c)^3$;　　(2) 半立方抛物线 $y^2=(x-c)^3$;

(3) 尼尔抛物线 $y^3=(x-c)^2$;　　(4) 环索线 $(y-c)^2=x^2\,\frac{a-x}{a+x}$.

解 (1) $\begin{cases}f(x,y,c)=y-(x-c)^3=0,\\ f'_c(x,y,c)=3(x-c)^2=0.\end{cases}$

消去 c,得 $y=0$,它为判别曲线的方程.

原曲线无奇点,且 $y=0$ 也不是原曲线族的某一支,因此,它是包络线.此包络线与原曲线族在 $(c,0)$ 点相切,且 $(c,0)$ 点是曲线的拐点,即它又是原曲线族拐点的轨迹.如图 6.32(1)所示.

(2) $\begin{cases}y^2-(x-c)^3=0,\\ 3(x-c)^2=0.\end{cases}$ 消去 c,得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为 $(c,0)$,因此它是奇点的轨迹.要看是否为包络线,还要看在奇点的两支是否与判别曲线相切.事实上,两支分别为 $y_1=(x-c)^{\frac{3}{2}}$,$y_2=-(x-c)^{\frac{3}{2}}$,均有 $y_1'(c)=0$,$y_2'(c)=0$.因此,$y=0$ 为原曲线族的包络线.如图 6.32(2)所示.

(3) $\begin{cases}y^3-(x-c)^2=0,\\ 2(x-c)=0.\end{cases}$ 消去 c,得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为 $(c,0)$.由于 $y=(x-c)^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=c$ 处的导数为无穷,因此,它与 $y=0$ 不相切,从而,它无包络线.奇点 $(c,0)$ 为尖点.如图 6.32(3)所示.

(4) $\begin{cases}(y-c)^2-x^2\,\dfrac{a-x}{a+x}=0,\\ -2(y-c)=0.\end{cases}$

消去 c,得 $x^2(a-x)=0$,即判别曲线为直线 $x=0$ 及 $x=a$.

显然 $x=0$ 为原曲线族奇点的轨迹,用 § 6. 的方法可判别出它是二重点的轨迹.事实上,

$$A=f''_{xx}(0,c)=2,\quad B=f''_{xy}(0,c)=0,\quad C=f''_{yy}(0,c)=-2,\quad AC-B^2=-4<0.$$

从而知 $x=0$ 不是包络线.

但是,在 $x=a$ 处 $f'_x(a,y)\neq 0\ (a\neq 0)$. 因此 $x=a$ 不是原曲线族奇点的轨迹,同时它又不是原曲线族的某一支. 因此,$x=a$是原曲线族的包络线,如图 6.32(4)所示.

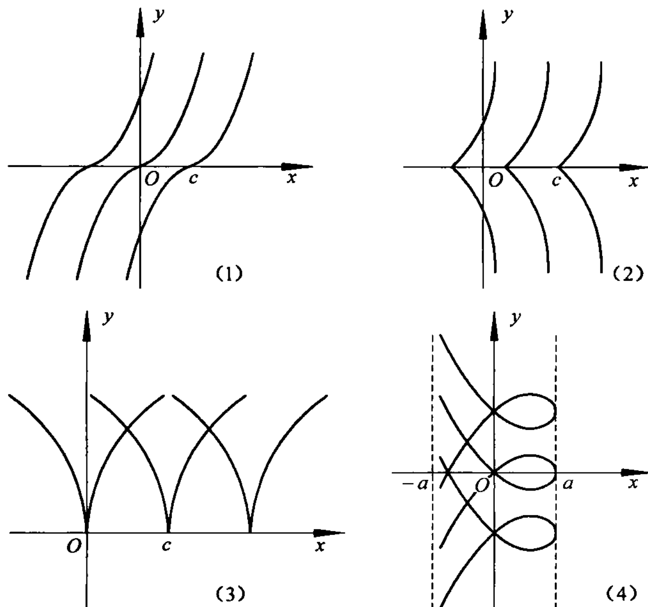


图 6.32

【3575】 求半径为 r,中心在圆周 $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=0$($t$ 是参数,$R>r$)上的球族的包络面.

解

$$\begin{cases}(X-R\cos t)^2+(Y-R\sin t)^2+Z^2=r^2, & (1)\\ 2R\sin t(X-R\cos t)-2R\cos t(Y-R\sin t)=0. & (2)\end{cases}$$

(2)式化简得 $X\sin t-Y\cos t=0$. 于是,

$$\tan t=\frac{Y}{X},\quad \cos t=\pm\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},\quad \sin t=\pm\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},\tag{3}$$

将(3)式代入(1)式,得

$$(X^2+Y^2)\left(1\pm\frac{R}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)^2+Z^2=r^2.$$

当取"+"号时,由于 $R^2>r^2$,故它不代表任何点(不是虚的)的轨迹.

当取"-"号时,由于原曲面族无奇点,且$(\sqrt{X^2+Y^2}-R)^2+Z^2=r^2$ 不是原曲面族的某一个,因此,它是原曲面族的包络面(圆环).

【3576】 求球族

$$(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2=1\quad(\text{其中 }\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,t\text{ 是参变数})$$

的包络面.

解

$$\begin{cases}(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2-1=0, & (1)\\ -2\cos\alpha(x-t\cos\alpha)-2\cos\beta(y-t\cos\beta)-2\cos\gamma(z-t\cos\gamma)=0. & (2)\end{cases}$$

由(2)得

$$t=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\tag{3}$$

将(3)式代入(1)式,化简整理得

$$x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2=1.\tag{4}$$

由于原曲面族的奇点均不在此方程所表示的曲面上,并且曲面(4)也不是原曲面族中的某一个,因此,曲面(4)为原曲面族的包络面.

【3577】 求相应体积 V 是常数的椭球面族$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的包络面..

解题思路 引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda\left(abc-\frac{3V}{4\pi}\right),$$

则包络面的方程由下列方程组确定：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ abc=\frac{3V}{4\pi},\\ F'_a=0,\ F'_b=0,\ F'_c=0.\end{cases}$$

消去 a,b,c，可得包络面方程 $|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}$.

解 引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda\left(abc-\frac{3V}{4\pi}\right),$$

则包络面的方程由下列方程组确定：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & (1)\\ abc=\frac{3V}{4\pi}, & (2)\\ F'_a=-\frac{2x^2}{a^3}+\lambda bc=0, & (3)\\ F'_b=-\frac{2y^2}{b^3}+\lambda ac=0, & (4)\\ F'_c=-\frac{2z^2}{c^3}+\lambda ab=0. & (5)\end{cases}$$

由(3)、(4)、(5)可解得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{\lambda abc}{2}=\mu. \tag{6}$$

将(6)式代入(1)式，得 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\mu=\frac{1}{3}$. 于是，

$$a=\sqrt{3}|x|,\quad b=\sqrt{3}|y|,\quad c=\sqrt{3}|z|. \tag{7}$$

将(7)式代入(2)式，得

$$|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}. \tag{8}$$

由于原曲面族无奇点，且曲面(8)也不是原曲面族中的某一个，故知曲面(8)为原曲面族的包络面.

【3578】 求半径为 ρ，中心在圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上的球族的包络面.

解 设球心为 (a,b,c)，则球的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2,$$

其中 $a^2+b^2=c^2$.

引入辅助函数 $F(x,y,z,a,b,c)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\lambda(a^2+b^2-c^2)$，

则包络面方程由下列方程组确定：

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2, & (1)\\ a^2+b^2=c^2, & (2)\\ F'_a=-2(x-a)+2\lambda a=0, & (3)\\ F'_b=-2(y-b)+2\lambda b=0, & (4)\\ F'_c=-2(z-c)+2\lambda c=0. & (5)\end{cases}$$

由(3)、(4)、(5)可得

$$\frac{x}{a}-1=\frac{y}{b}-1=-\frac{z}{c}+1=\lambda.$$

引入记号$\frac{1}{\mu}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=2-\frac{z}{c}$,则有

$$a=\mu x,\quad b=\mu y,\quad c=\frac{\mu z}{2\mu-1}. \tag{6}$$

将(6)式代入(1),(2)两式,得
$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{z^2}{(2\mu-1)^2}=\dfrac{\rho^2}{(\mu-1)^2}, & (7)\\ x^2+y^2-\dfrac{z^2}{(2\mu-1)^2}=0. & (8)\end{cases}$$

(7)+(8)得

$$2(x^2+y^2)=\frac{\rho^2}{(\mu-1)^2}\quad 或\quad \sqrt{2}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,|2\mu-2|. \tag{9}$$

由(8)得
$$2\mu-1=\pm\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{10}$$

将(10)代入(9),整理得
$$\sqrt{2}\rho=|\sqrt{x^2+y^2}\pm z|. \tag{11}$$

由于原曲面族无奇点,且曲面(11)也不是原曲面族的某一个.因此,曲面(11)为原曲面族的包络面.

【3579】 有一发光点位于坐标原点.若$x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$,求由球

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2$$

投影所生成的阴影圆锥.

解 解法1:

所求的阴影圆锥的表面,可看作是一个过原点的平面族的包络面,此平面族的方程为$ax+bx+cz=0$,其中a,b,c满足约束条件
$$\begin{cases} ax_0+by_0+cz_0=\pm R,\\ a^2+b^2+c^2=1.\end{cases}$$

引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=ax+by+cz+\lambda(ax_0+by_0+cz_0\mp R)+\mu(a^2+b^2+c^2-1),$$

则包络面方程由下列方程组确定:

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, & (1)\\ a^2+b^2+c^2=1, & (2)\\ ax_0+by_0+cz_0=\pm R, & (3)\\ F'_a=x+\lambda x_0+2\mu a=0, & (4)\\ F'_b=y+\lambda y_0+2\mu b=0, & (5)\\ F'_c=z+\lambda z_0+2\mu c=0. & (6)\end{cases}$$

方程(4)、(5)、(6)要能解出λ、μ,其中a、b、c必须满足关系式

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a\\ y & y_0 & b\\ z & z_0 & c\end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

记
$$r_1=\begin{vmatrix} y & y_0\\ z & z_0\end{vmatrix},\quad r_2=\begin{vmatrix} z & z_0\\ x & x_0\end{vmatrix},\quad r_3=\begin{vmatrix} x & x_0\\ y & y_0\end{vmatrix},$$

则上述关系式可记为
$$ar_1+br_2+cr_3=0. \tag{8}$$

由(1)、(3)、(8)可解得
$$a=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y & z\\ \pm R & y_0 & z_0\\ 0 & r_2 & r_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & z\\ x_0 & y_0 & z_0\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}}=\frac{\pm R(zr_2-yr_3)}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}$$

或
$$a^2=\frac{R^2(zr_2-yr_3)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2},b^2=\frac{R^2(xr_3-zr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2},c^2=\frac{R^2(xr_2-yr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2}. \tag{9}$$

将(9)式代入(2)式，即得
$$\begin{aligned}(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2&=R^2[(yr_3-zr_2)^2+(xr_3-zr_1)^2+(xr_2-yr_1)^2]\\&=R^2[(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2)-(xr_1+yr_2+zr_3)^2]\\&=R^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

（其中利用了 $xr_1+yr_2+zr_3=0$，这是不难验证的.）于是，有
$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=R^2(x^2+y^2+z^2). \tag{10}$$

由于原平面族无奇点，且曲面(10)不是平面族的某一个，因此，曲面(10)即为包络面. 所求的阴影圆锥为此锥面的内部，即满足不等式
$$r_1^2+r_2^2+r_3^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$
的空间区域(严格说来，还要除去球前部的区域).

解法 2：

显然，阴影圆锥是由通过坐标原点的球面$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 的全体切线构成的. 由解析几何知，如果点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$不在二次曲面
$$\begin{aligned}F(x,y,z)&=ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gxz+2hxy+2px+2qy+2rz+\mathrm{d}\\&=\varphi(x,y,z)+2px+2qy+2rz+\mathrm{d}=0\end{aligned} \tag{1}$$
上，则通过点 P_1 而和二次曲面(1)相切的全体切线所构成的锥面方程为
$$[(x-x_1)F'_x(x_1,y_1,z_1)+(y-y_1)F'_y(x_1,y_1,z_1)+(z-z_1)F'_z(x_1,y_1,z_1)]^2-4\varphi(x-x_1,y-y_1,z-z_1)\cdot F(x_1,y_1,z_1)=0. \tag{2}$$

今有
$$\begin{aligned}F(x,y,z)&=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2\\&=x^2+y^2+z^2-2(x_0x+y_0y+z_0z)+(x_0^2+x_0^2+x_0^2-R^2).\end{aligned}$$

由于
$$F'_x(0,0,0)=-2x_0,\ F'_y(0,0,0)=-2y_0,\ F'_z(0,0,0)=-2z_0,$$
故由(2)即得阴影圆锥面的方程为
$$(-2x_0x-2y_0y-2z_0z)^2-4(x^2+y^2+z^2)(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2)=0$$
或
$$(y_0^2+z_0^2)x^2+(x_0^2+z_0^2)y^2+(x_0^2+y_0^2)z^2-2x_0y_0xy-2y_0z_0yz-2z_0x_0zx-R^2(x^2+y^2+z^2)=0.$$
由于
$$(y_0^2+z_0^2)x_0^2+(x_0^2+z_0^2)y_0^2+(x_0^2+y_0^2)z_0^2-2x_0^2y_0^2-2y_0^2z_0^2-2z_0^2x_0^2-R^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$$
$$=-R^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)<0,$$
故所求的阴影圆锥为此锥面的内部，即满足不等式
$$(y_0^2+z_0^2)x^2+(z_0^2+x_0^2)y^2+(x_0^2+y_0^2)z^2-2x_0y_0xy-2y_0z_0yz-2z_0x_0zx-R^2(x^2+y^2+z^2)\leqslant 0$$
或
$$\begin{vmatrix}x&y\\x_0&y_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y&z\\y_0&z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z&x\\z_0&x_0\end{vmatrix}^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$
的空间区域(严格说来，还要除去球前部的区域).

解法 3：

如图 6.33 所示，由三角形的面积公式$\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{l}_0|\sin\alpha$ 得到
$$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{l}_0|=|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{l}_0|\frac{R}{|\boldsymbol{l}_0|},$$
其中 $\boldsymbol{l}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$，$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，而 $P(x,y,z)$为锥面上的任意一点. 平方之，即得圆锥曲面的方程为

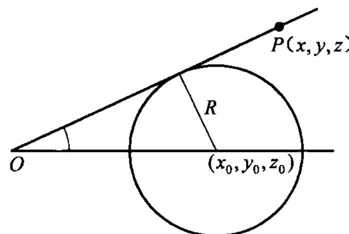


图 6.33

$$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{l}_0|^2=R^2|\boldsymbol{r}|^2.$$

于是，所求的阴影圆锥为适合不等式$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{l}_0|^2\leqslant R^2|\boldsymbol{r}|^2$，即

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域(严格说来，还要除去球前部的区域).

【3580】 若参变量p和q满足方程$p^2+q^2=1$，求平面族$z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0)$的包络面.

提示 仿3577题参变量为p和q，包络面方程为

$$(z-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.$$

解 解法1：

引入辅助函数 $F(x,y,z,p,q)=z-z_0-p(x-x_0)-q(y-y_0)+\lambda(p^2+q^2-1)$，

则包络面方程由下列方程组确定：

$$\begin{cases} z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0), & (1)\\ p^2+q^2=1. & (2)\\ F'_p=-(x-x_0)+2\lambda p=0, & (3)\\ F'_q=-(y-y_0)+2\lambda q=0. & (4)\end{cases}$$

(3)$\times p+$(4)$\times q$，得$2\lambda=z-z_0$. 于是，由(3)，(4)得

$$p=\frac{x-x_0}{z-z_0},\qquad q=\frac{y-y_0}{z-z_0}. \tag{5}$$

将(5)式代入(1)式，得 $\qquad (z-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.$

由于原平面族无奇点，且显见上述曲面不是平面，故上述曲面即为包络面.

解法2：

引入新参数θ，令$p=\sin\theta$，$q=\cos\theta$.

$$\begin{cases} z-z_0=\cos\theta\cdot(x-x_0)+\sin\theta\cdot(y-y_0), & (1)\\ \sin\theta\cdot(x-x_0)=\cos\theta\cdot(y-y_0). & (2)\end{cases}$$

于是，

$$\sin\theta=\frac{\pm(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},\quad \cos\theta=\frac{\pm(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.$$

代入(1)式，得

$$(z-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.$$

由于原平面族无奇点，且上述曲面不是平面，故上述曲面即为包络面.

§6. 泰勒公式

1° **泰勒公式** 若函数$f(x,y)$在点(a,b)的某邻域内有直到$n+1$阶(包括$n+1$阶)的连续偏导数，则在此邻域内成立公式

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i f(a,b)+R_n(x,y), \tag{1}$$

其中 $R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}f[a+\theta_n(x-a),b+\theta_n(y-b)]\quad(0<\theta_n<1).$

2° **泰勒级数** 若函数$f(x,y)$无穷次可微且$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x,y)=0$，则此函数可表成幂级数的形式：

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i+j\geqslant 1}^{\infty}\frac{1}{i!j!}f^{(i+j)}_{x^iy^j}(a,b)(x-a)^i(y-b)^j \tag{2}$$

在$a=b=0$的特殊情形下，公式(1)和(2)分别称为*麦克劳林公式*和*麦克劳林级数*.

对于多于两个变量的函数有类似的公式.

3° **平面曲线的奇点** 若可微曲线 $F(x,y)=0$ 上的点 $M_0(x_0,y_0)$ 满足下列条件：

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_x(x_0,y_0)=0,\quad F'_y(x_0,y_0)=0,$$

则称此点为奇点.设 $M_0(x_0,y_0)$ 是属于光滑曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线的奇点，且数

$$A=F''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=F''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=F''_{yy}(x_0,y_0)$$

不全为零.于是，若

(1) $AC-B^2>0$，则 M_0 是孤立点；

(2) $AC-B^2<0$，则 M_0 是二重点(节点)；

(3) $AC-B^2=0$，则 M_0 是上升点或孤立点.

在 $A=B=C=0$ 的情形，奇点的种类可能更复杂.至于不属于光滑曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线，奇点还可能有更复杂的本质：中断点，角点等等.

【3581】 在点 $A(1,-2)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数

$$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y-6,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x-2y-3;$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

所有三阶偏导数均为零，因此，有 $R_2(x,y)=0$.在点 $A(1,-2)$ 处，

$$f(1,-2)=5,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

于是，

$$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$$

【3582】 在点 $A(1,1,1)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3yz,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3xz,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=3z^2-3xy;$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3z,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-3x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-3y;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=-3,$$

其余的三阶混合偏导数均为零；所有的四阶偏导数均为零，因此，$R_3(x,y,z)=0$.在点 $A(1,1,1)$ 处，

$$f(1,1,1)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-3,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=-3,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\cdots=\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x}=0,$$

于是，

$$f(x,y,z)=f(1,1,1)+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}+(z-1)\frac{\partial}{\partial z}\right]^i f(1,1,1)$$

$$=3\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)\right]+(x-1)^3$$

$$+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1).$$

【3583】 当自变量值从 $x=1,y=-1$ 变到 $x_1=1+h,y_1=-1+k$ 时，求函数 $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$ 的增量.

解 记 $A(1,-1)$ 及 $P(1+h,-1+k)$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A=(2xy+y^2-2y)\Big|_A=1,\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A=(x^2+2xy-2x)\Big|_A=-3;$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_A=2y\Big|_A=-2,\qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_A=2x\Big|_A=2,\qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_A=(2x+2y-2)\Big|_A=-2;$$

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_A=\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_A=0,\qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right|_A=\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right|_A=2;$$

所有四阶偏导数均为零，因此，$R_3(x,y)=0$. 于是，按泰勒公式即得

$$\Delta f=f(P)-f(A)=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(A)=(h-3k)+(-h^2-2hk+k^2)+hk(h+k).$$

【3584】 设 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz$，
按数 h,k 和 l 的正整数次幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2(Ax+Dy+Ez)$， $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2A$， $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2D$， $\frac{\partial f}{\partial y}=2(By+Dx+Fz)$， $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2B$，

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=2F$， $\frac{\partial f}{\partial z}=2(Cz+Ex+Fy)$， $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2C$， $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=2E$.

所有三阶偏导数均为零，因此 $R_2(x,y)=0$. 于是，按泰勒公式即得

$$\begin{aligned}&f(x+h,y+k,z+l)\\&=f(x,y,z)+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^i f(x,y,z)\\&=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)+k(By+Dx+Fz)+l(Cz+Ex+Fy)]+[Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Dhk+2Ehl+2Fkl]\\&=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)+k(Dx+By+Fz)+l(Ex+Fy+Cz)]+f(h,k,l).\end{aligned}$$

【3585】 写出函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $A(1,1)$ 的邻域内的展开式，到二次项为止.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$， $\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$，

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$， $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$， $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x$， $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=y(y-1)(y-2)x^{y-3}$，

$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=x^y\ln^3 x$， $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x$， $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x$.

于是，按泰勒公式在点(1,1)附近展开到二次项，得

$$x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2[1+\theta(x-1),1+\theta(y-1)]\quad 0<\theta<1,$$

其中余项

$$\begin{aligned}R_2(x,y)&=\frac{1}{3!}\{y(y-1)(y-2)x^{y-3}dx^3+3[(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x]dx^2dy\\&\quad+3[yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x]dxdy^2+x^y\ln^3 xdy^3\}\\&=\frac{1}{6}x^y\left[\left(\frac{y}{x}dx+\ln xdy\right)^3+3\left(\frac{y}{x}dx+\ln xdy\right)\left(-\frac{y}{x^2}dx^2+\frac{2}{x}dxdy\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{2y}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}dx^2dy\right)\right],\\&\quad dx=x-1,\qquad dy=y-1.\end{aligned}$$

【3586】 根据麦克劳林公式展开函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 到四次项为止.

解 由于

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}}&=1+\frac{1}{2}x+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\cdots\\&\approx1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3,\end{aligned}$$

故得 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}=[1+(-x^2-y^2)]^{\frac{1}{2}}\approx1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2$.

【3587】 若 $|x|$ 和 $|y|$ 同 1 比较为很小的量，对于下列表达式：

(1) $\frac{\cos x}{\cos y}$； (2) $\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}$

推出精确到二次项的近似公式.

解 (1) $\frac{\cos x}{\cos y}=\cos x(1-\sin^2 y)^{-\frac{1}{2}}=(1-\frac{x^2}{2}+\cdots)(1+\frac{1}{2}\sin^2 y+\cdots)$

$$\approx(1-\frac{x^2}{2})(1+\frac{1}{2}\sin^2 y)\approx(1-\frac{x^2}{2})(1+\frac{1}{2}y^2)\approx1-\frac{1}{2}(x^2-y^2).$$

(2) $$\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}=\arctan\frac{1+\frac{x}{1+y}}{1-\frac{x}{1+y}}=\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x}{1+y}=\frac{\pi}{4}+(\frac{x}{1+y})-\frac{1}{3}(\frac{x}{1+y})^3+\cdots$$

$$\approx\frac{\pi}{4}+x(1-y+y^2)\approx\frac{\pi}{4}+x-xy.$$

【3588】 假定 x,y,z 的绝对值是很小的量,简化表达式

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z.$$

解 我们简化上式到二次项.

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z\approx1-\frac{1}{2}(x+y+z)^2-(1-\frac{1}{2}x^2)(1-\frac{1}{2}y^2)(1-\frac{1}{2}z^2)$$

$$\approx1-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)-(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2)=-(xy+yz+zx).$$

【3589】 按 h 的幂次展开函数

$$F(x,y)=\frac{1}{4}[f(x+h,y)+f(x,y+h)+f(x-h,y)+f(x,y-h)]-f(x,y),$$

精确到 h^4.

解 记 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y},\cdots$,余类似,

即得

$$F(x,y)=\frac{1}{4}\{[f(x+h,y)-f(x,y)+[f(x,y+h)-f(x,y)]+[f(x-h,y)-f(x,y)]$$
$$+[f(x,y-h)-f(x,y)]\}$$
$$\approx\frac{1}{4}\left\{\left[h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right]+\left[h\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right]\right.$$
$$\left.+\left[-h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right]+\left[-h\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right]\right\}$$
$$=\frac{h^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\frac{h^4}{48}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right).$$

【3590】 已知中心在点 $P(x,y)$ 半径为 ρ 的圆周,设 $f(P)=f(x,y)$ 及 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 为已知圆周的内接正三角形的顶点,并且 $x_1=x+\rho,\ y_1=y$. 按 ρ 的正整数次幂展开函数

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)],$$

精确到 ρ^2.

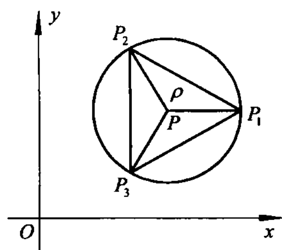


图 6.34

解 如图 6.34 所示. $\Delta P_1P_2P_3$ 之三顶点分别为

$$P_1(x+\rho,y),\quad P_2(x-\frac{\rho}{2},y+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho),\quad P_3(x-\frac{\rho}{2},y-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho).$$

于是,

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$
$$\approx\frac{1}{3}\left\{\left[f(P)+\rho\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\right.$$
$$\left.+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\right\}=f(P)+\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

【3591】 按 h 与 k 的幂次展开函数

$$\Delta_{xy}f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y).$$

解 $\Delta_{xy} f(x,y)=\left[f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right]$

$$-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right]-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right]+f(x,y)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}}=hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right].$$

【3592】 按 ρ 的幂次展开函数 $F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

解 $F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]\mathrm{d}\varphi$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

下面计算上式中的积分.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi-\varphi)\sin^{n-m}(\pi-\varphi)\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi+\varphi)\sin^{n-m}(\pi+\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(2\pi-\varphi)\sin^{n-m}(2\pi-\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}[1+(-1)^m+(-1)^n+(-1)^{n-m}]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

当 m,n 中至少有一个为奇数时,显见上述积分为零.

当 m,n 均为偶数时,由 2290 题的结果知:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\pi(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n+1}m!n!(n-m)!}=\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}m!n!(n-m)!}.$$

代入原式,并注意到其中的 m、n 只能为偶数,适当改变一下指标的编号,即得

$$F(\rho)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^{2n}}{(2m)!(2n-2m)!}\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}\cdot\frac{(2m)!(2n-2m)}{2^{2n}m!n!(n-m)!}$$

$$=f(x,y)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n f(x,y).$$

将下列函数展开成麦克劳林级数:

【3593】 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

解 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n=\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\right]\left[1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots\right]$

$$=1+(mx+ny)+\frac{1}{2!}[m(m-1)x^2+2mnxy+n(n-1)y^2]+\cdots\quad(|x|<1,\ |y|<1).$$

【3594】 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

解 $f(x,y)=\ln[1+(x+y)]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x+y)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}x^m y^{k-m}\right]$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{m!(k-m)!}x^m y^{k-m}\tag{1}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^m y^n.\tag{2}$$

当 $m=0$, $n=0$ 时,分子出现 $(-1)!$,规定该项为零.下面讨论一下收敛区间.(1)式成立,只要求 $|x+y|$

<1 即可. 但从(1)式到(2)式，必须要求(1)式绝对收敛，这样才能将各项重新排列. 不难看出(1)式级数各项取绝对值后即函数 $-\ln[1-(|x|+|y|)]$ 的展开式，它的收敛要求 $|x|+|y|<1$. 这就是 $f(x,y)$ 的展开式的收敛区域.

【3595】 $f(x,y)=e^x\sin y$.

解 $$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^my^{2n+1}}{m!(2n+1)!}$$
$$(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

【3596】 $f(x,y)=e^x\cos y$.

解 $$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^my^{2n}}{m!(2n)!}$$
$$(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

【3597】 $f(x,y)=\sin x\,\mathrm{sh}y$.

解 $$\mathrm{sh}y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^n}{n!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad(|y|<+\infty).$$

于是，$$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}$$
$$(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

【3598】 $f(x,y)=\cos x\,\mathrm{ch}y$.

解 $$\mathrm{ch}y=\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}\quad(|y|<+\infty).$$

于是，$$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!(2n)!}$$
$$(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

【3599】 $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

解 $$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^n\frac{x^{2k}y^{2(2n+1-k)}}{k!(2n+1-k)!}$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{n+m}{2}\pi\right)\frac{x^{2n}y^{2m}}{m!n!}\quad(x^2+y^2<+\infty).$$

【3600】 $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$.

解 $$f(x,y)=\left[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n}\right]=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^my^n}{mn}$$
$$(|x|<1,\ |y|<1).$$

【3601】 写出函数 $$f(x,y)=\int_0^1(1+x)^{t^2y}\mathrm{d}t$$
的麦克劳林级数前面不为零的三项.

解 $$(1+x)^{t^2y}=e^{t^2y\ln(1+x)}\approx1+t^2y\ln(1+x)+\frac{1}{2!}[t^2y\ln(1+x)]^2\approx1+t^2y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y.$$

于是，
$$f(x,y)\approx\int_0^1\left(1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y\right)\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}y\left(x-\frac{x^2}{2}\right).$$

【3602】 按二项式 $x-1$ 和 $y+1$ 的正整数次幂将函数 e^{x+y} 展开成幂级数.

解 $$e^{x+y}=e^{(x-1)+(y+1)}=e^{x-1}e^{y+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!n!}\quad(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

【3603】 写出函数 $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ 在点 $M(1,1)$ 的邻域内的泰勒级数展开式.

解 令 $x=1+h$，$y=1+k$，则得

$$\frac{x}{y}=\frac{1+h}{1+k}=(1+h)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n k^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1+(x-1)](y-1)^n \quad (|y|<+\infty,\ 0<y<2).$$

【3604】 设 z 为由方程 $z^3-2xz+y=0$ 定义的 x 和 y 的隐函数，且当 $x=1$ 和 $y=1$ 时 $z=1$. 写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

解 对原方程微分一次，得

$$3z^2\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0. \tag{1}$$

再微分一次，得

$$(3z^2-2x)\mathrm{d}^2z+6z\mathrm{d}z^2-4\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0. \tag{2}$$

以 $x=1$，$y=1$，$z=1$ 代入(1)，(2)两式，得

$\mathrm{d}z=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$

$\mathrm{d}^2z=(4\mathrm{d}x-6\mathrm{d}z)\mathrm{d}z=(4\mathrm{d}x-12\mathrm{d}x+6\mathrm{d}y)(2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=-16\mathrm{d}x^2+20\mathrm{d}x\mathrm{d}y-6\mathrm{d}y^2$，

$$\vdots$$

于是，可求得在 $x=1$，$y=1$ 处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-16,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6;$$

$$\vdots$$

从而，有 $$z=1+2(x-1)-(y-1)-[8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+\cdots$$

研究下列曲线的奇点的种类并大略地画出这些曲线：

【3605】 $y^2=ax^2+x^3$.

提示 点(0,0)为奇点，分别就 $a>0$，$a<0$ 及 $a=0$ 三种情况加以讨论.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=ax^2+x^3-y^2=0,\\ F'_x(x,y)=2ax+3x^2=0,\\ F'_y(x,y)=-2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点.

其次，由于

$$A=F''_{xx}(0,0)=2a,\quad B=F''_{xy}(0,0)=0,\quad C=F''_{yy}(0,0)=-2,\quad AC-B^2=-4a,$$

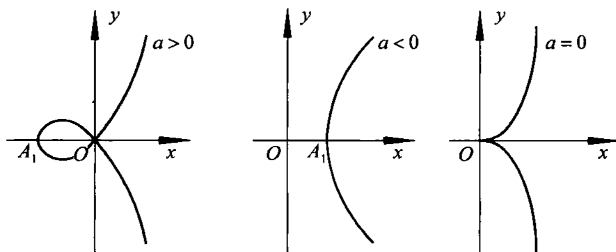


图 6.35

故当 $a>0$ 时，点(0,0)为二重点；当 $a<0$ 时，点(0,0)为孤立点；当 $a=0$ 时，原方程化为 $y^2=x^3$，由 3574(2) 的讨论知，点(0,0)为尖点.

如图 6.35 所示，点 A_1 为 $(-a,0)$

【3606】 $x^3+y^3-3xy=0$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0,\\ F'_x(x,y)=3x^2-3y=0,\\ F'_y(x,y)=3y^2-3x=0\end{cases}$$

得 $x=0,\ y=0$,故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0,\ B=F''_{xy}(0,0)=-3,\ C=F''_{yy}(0,0)=0$,且 $AC-B^2=-9<0$,故点$(0,0)$为二重点.图像参看 370 题(2).

【3607】 $x^2+y^2=x^4+y^4$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=x^2+y^2-x^4-y^4=0,\\ F'_x(x,y)=2x-4x^3=0,\\ F'_y(x,y)=2y-4y^3=0\end{cases}$$

得 $x=0,\ y=0$,故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=2,\ B=F''_{xy}(0,0)=0,\ C=F''_{yy}(0,0)=2$,且 $AC-B^2=4>0$,故点$(0,0)$为孤立点.图像参看 1542 题.

【3608】 $x^2+y^4=x^6$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=x^2+y^4-x^6=0,\\ F'_x(x,y)=2x-6x^5=0,\\ F'_y(x,y)=4y^3=0\end{cases}$$

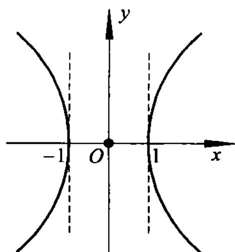


图 6.36

得 $x=0,\ y=0$,故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=2,\ B=F''_{xy}(0,0)=0,\ C=F''_{yy}(0,0)=0$,且 $AC-B^2=0$,故点$(0,0)$为上升点或孤立点.本题中,点$(0,0)$为孤立点(图 6.36).事实上,将原方程改写为 $y^4=x^6-x^2$,对$(0,0)$点的很小的邻域内的点($|x|<1,\ |y|<1$),左端$y^4\geqslant 0$,右端 $x^6-x^2=x^2(x^4-1)\leqslant 0$,除点$(0,0)$外没有适合方程的点,故点$(0,0)$为孤立点.

【3609】 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0,\\ F'_x(x,y)=4x(x^2+y^2)-2a^2x=0,\\ F'_y(x,y)=4y(x^2+y^2)+2a^2y=0\end{cases}$$

得 $x=0,\ y=0$,故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=-2a^2,\ B=F''_{xy}(0,0)=0,\ C=F''_{yy}(0,0)=2a^2$,且 $AC-B^2=-4a^4<0(a\neq 0)$,故点$(0,0)$为二重点.图像参看 3378 题,讨论参考 3367 题,只需将该题中的 1 换成 a.

【3610】 $(y-x^2)^2=x^5$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=(y-x^2)^2-x^5=0,\\ F'_x(x,y)=-4x(y-x^2)-5x^4=0,\\ F'_y(x,y)=2(y-x^2)=0\end{cases}$$

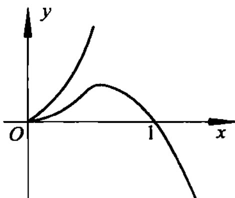


图 6.37

得 $x=0,\ y=0$,故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0, B=F''_{xy}(0,0)=0, C=F''_{yy}(0,0)=2$,且 $AC-B^2=0$,故对点$(0,0)$还需要再讨论一下.由原方程可解出 $y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}$,右边只允许$x\geqslant 0$,当 $0<x<1$ 时不论取"+号"还是"−"号均有 $y>0$,且均有 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$,故点$(0,0)$为尖点.如图 6.37 所示.

【3611】 $(a+x)y^2=(a-x)x^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=(a+x)y^2-(a-x)x^2=0, & (1)\\ F'_x(x,y)=y^2-2ax+3ax^2=0, & (2)\\ F'_y(x,y)=2(a+x)y=0. & (3)\end{cases}$$

由(3)得 $x=-a$ 或 $y=0$.

将 $y=0$ 代入(1)、(2),得 $x=0$.

将 $x=-a$ 代入(1)式,得 $(a-x)x^2=0$. 若 $a\neq0$,则得出矛盾的结果. 若 $a=0$,则也得到 $x=0$, $y=0$,故点(0,0)为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=-2a$, $B=F''_{xy}(0,0)=0$, $C=F''_{yy}(0,0)=2a$,且 $AC-B^2=-4a^2$,故当 $a\neq0$ 时,点(0,0)为二重点;当 $a=0$ 时,方程转化为 $xy^2=-x^3$,从而,曲线为 $x=0$,点(0,0)为上升点.

如图 6.38 所示,图中点 A_1 为 $(a,0)$.

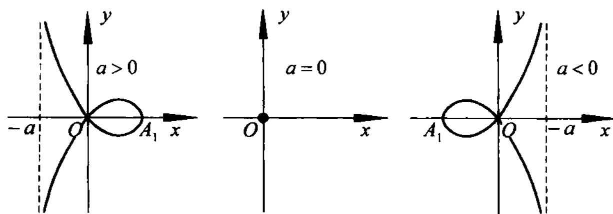


图 6.38

【3612】 研究参变量 a,b,c ($a\leqslant b\leqslant c$)的值与曲线 $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ 的形状之关系.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=y^2-(x-a)(x-b)(x-c)=0, & (1)\\ F'_x(x,y)=-(x-a)(x-b)-(x-a)(x-c)-(x-b)(x-c)=0, & (2)\\ F'_y(x,y)=2y=0. & (3)\end{cases}$$

由(3)得 $y=0$,代入(1),联立(1),(2)求解.

当 $a<b<c$ 时,(1),(2)无解.因此无奇点,此时曲线如图 6.39(1)所示;

当 $a=b<c$ 时,显然(1),(2)有解 $x=a$, $y=0$,由于 $A=F''_{xx}(a,0)=-2(a-c)$, $B=F''_{xy}(a,0)=0$, $C=F''_{yy}(a,0)=2$,且 $AC-B^2=-4(a-c)>0$,故点 $A_1(a,0)$ 为孤立点,如图6.39(2)所示;

当 $a<b=c$ 时,显然(1),(2)有解 $x=b$, $y=0$. 由于 $A=F''_{xx}(b,0)=-2(c-a)$, $B=F''_{xy}(b,0)=0$, $C=F''_{yy}(b,0)=2$,且 $AC-B^2=-4(c-a)<0$,故点 $A_2(b,0)$ 为二重点,如图6.39(3)所示;

当 $a=b=c$ 时,显然有解 $x=a$, $y=0$. 由于 $AC-B^2=0$,此时原方程为 $y^2=(x-a)^3$,且由 3574 题(2)的结果知,点 $A_1(a,0)$ 为尖点,如图 6.39(4)所示.

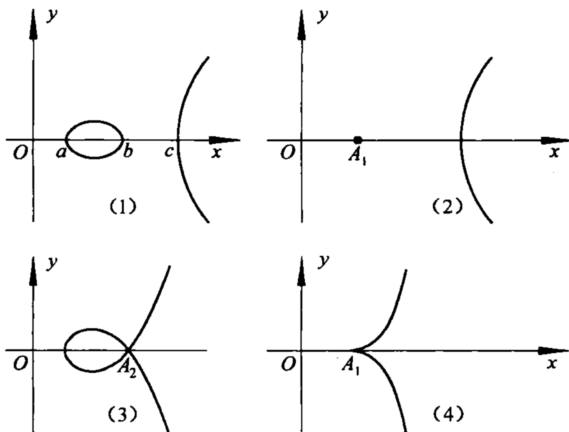


图 6.39

研究超越曲线的奇点：

【3613】 $y^2=1-e^{-x^2}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-1+e^{-x^2}=0,\\F'_x(x,y)=-2xe^{-x^2}=0,\\F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点.

又 $A=F''_{xx}(0,0)=-2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且 $AC-B^2=-4<0$，故点(0,0)为二重点.

【3614】 $y^2=1-e^{-x^3}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-1+e^{-x^3}=0,\\F'_x(x,y)=-3x^2e^{-x^3}=0,\\F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点.

又 $A=F''_{xx}(0,0)=0$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且 $AC-B^2=0$，故对点(0,0)还需再讨论一下. 原式可解为 $x=-\sqrt[3]{\ln(1-y^2)}>0$，在(0,0)附近，第一及第四象限各有原曲线的一支，因此，点(0,0)为尖点.

【3615】 $y=x\ln x$.

解 $F(x,y)=x\ln x-y$，　$F'_x(x,y)=1+\ln x$，　$F'_y(x,y)=-1\neq0$，故无奇点. 如图 6.40 所示.

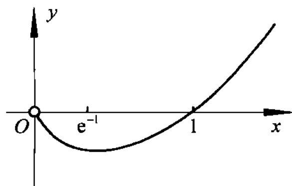


图 6.40

【3616】 $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

提示 注意点(0,0)为角点.

解 在 $x=0$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to+0}y=\lim\limits_{x\to-0}y=0$，故 $x=0$ 为"可移去"的第一类不连续点，补充函数在该点的值为零后，即得知函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0,\\0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续. 由于 $F'_y(x,y)=1\neq0$，故无奇点. 当 $x\neq0$ 时，由于

$$y'=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2},$$

$$\lim_{x\to+0}y'=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1+z)e^z+1}{(1+e^z)^2}=\lim_{z\to+\infty}\frac{e^z(z+2)}{2e^z(1+e^z)}=\lim_{z\to+\infty}\frac{z+2}{2(1+e^z)}=0,$$

$$\lim_{x\to-0}y'=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1-z)e^{-z}+1}{(1+e^{-z})^2}=1,$$

故点(0,0)为角点. 如图 6.41 所示.

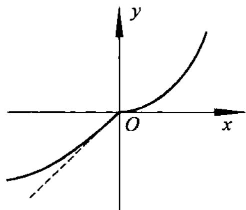


图 6.41

【3617】 $y=\arctan\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

解 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$点为不连续点. 由于

$$\lim_{x\to k\pi-0}y=(-1)^k\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to k\pi-0}y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2},$$

故点 $x=k\pi$ 为函数的第一类不连续点.

【3618】 $y^2=\sin\frac{\pi}{x}$.

解 $y=\pm\sqrt{\sin\frac{\pi}{x}}$,它在$\left(\frac{1}{2k},\frac{1}{2k-1}\right)$$(k=\pm1,\pm2,\cdots)$内无定义.

在边界点 $x=\frac{1}{2k}$及 $x=\frac{1}{2k-1}$, $y=0$. 函数图像有上下两支.

设 $F(x,y)=y^2-\sin\frac{\pi}{x}$,则在边界点,由于 $F'_x\neq0$, $F'_y=0$,故也无奇点.

在点(0,0)的任何邻域内,有无穷多个曲线的封闭分支,这些分支没有一个过(0,0)点,它不属于任何一种类型,但它是函数的第二类不连续点.

【3619】 $y^2=\sin x^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-\sin x^2=0,\\ F'_x(x,y)=-2x\cos x^2=0,\\ F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$, $y=0$,故点(0,0)为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=-2$, $B=F''_{xy}(0,0)=0$, $C=F''_{yy}(0,0)=2$,且 $AC-B^2=-4<0$,故点(0,0)为二重点.

【3620】 $y^2=\sin^3 x$.

解 显见,函数 y 的周期为 2π,在$(2k\pi,(2k+1)\pi)$内函数有定义,而在$((2k-1)\pi,2k\pi)$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$内无定义.

解方程组
$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-\sin^3 x=0,\\ F'_x(x,y)=-3\sin^2 x\cos x=0,\\ F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

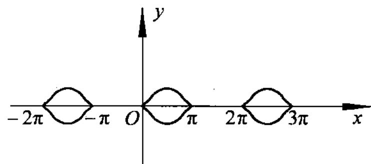


图 6.42

得 $x=0$, $y=0$,故点(0,0)为奇点.

在点(0,0)的左侧(指充分小的范围,下同,不再说明)无曲线的点,而在右侧的第一、第四象限分别有曲线的两枝,因此,点(0,0)为尖点,如图 6.42 所示.

由周期性可知,点$(k\pi,0)$$(k\pm1,\pm2,\cdots)$也为尖点. 只是当 k 是偶数时,右侧才有曲线的两枝;当 k 是奇数时,左侧才有曲线的两枝.

§7. 多元函数的极值

1° **极值的定义** 若函数 $f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$在点 P_0 的邻域内有定义,并且当 $0<\rho(P_0,P)<\delta$ 时,$f(P_0)>f(P)$或 $f(P_0)<f(P)$,则说,函数 $f(P)$在点 P_0 有极值(相应地为极大值或极小值).*

2° **极值的必要条件** 可微函数 $f(P)$仅在临界点 P_0,即 $\mathrm{d}f(P_0)=0$ 的点 P_0 能达到极值. 所以,函数 $f(P)$的极值点应当满足方程组 $f'_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=0$ $(i=1,\cdots,n)$.

3° **极值的充分条件** 函数 $f(P)$在点 P_0 有:

(1) 极大值,若 $\mathrm{d}f(P_0)=0$, 且当 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\mathrm{d}x|\neq0$ 时 $\mathrm{d}^2f(P_0)<0$,

(2) 极小值,若 $\mathrm{d}f(P_0)=0$, 且当 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\mathrm{d}x|\neq0$ 时 $\mathrm{d}^2f(P_0)>0$.

---

* 若将不等式 $f(P_0)>f(P)$[或 $f(P_0)<f(P)$]换为不等式 $f(P_0)\geqslant f(P)$[或 $f(P_0)\leqslant f(P)$],则称 $f(P)$在点 P_0 有弱极大值(或弱极小值).

《题解》作者注

研究二阶微分 $d^2f(P_0)$ 的符号,可用化相应的二次型为标准形式的方法.

特别是,对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x,y)$,若在临界点 (x_0,y_0) $[df(x_0,y_0)=0]$ 成立条件 $D=AC-B^2\neq 0$,其中 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$,则那里有:

(1) 极小值,若 $D>0$, $A>0$ $(C>0)$; (2) 极大值,若 $D>0$, $A<0$ $(C<0)$; (3) 极值不存在,若 $D<0$.

4° **条件极值** 在关系式 $\varphi_i(P)=0$ $(i=1,\cdots,m;\ m<n)$ 存在的条件下,求函数 $f(P_0)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值的问题,可归结为求拉格朗日函数

$$L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(P)$$

[其中 $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$ 为常数因子]的普通极值的问题.关于条件极值的存在和性质的问题,在最简单的情况下,可根据对函数 $L(P)$ 在临界点 P_0 的二阶微分 $d^2L(P_0)$ 的符号的研究来解决,此时变量 $dx_1,dx_2,\cdots,dx_n$ 满足以下限制条件:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=0 \quad (i=1,\cdots,m).$$

5° **绝对极值** 在有界闭区域内的可微函数 $f(P)$ 在此区域内或于临界点,或于区域的边界点达到自己的最大值和最小值.

研究下列多元函数的极值:

【3621】 $z=x^2+(y-1)^2$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=2(y-1)=0\end{cases}$$

得临界点 $P_0(0,1)$.显然 $z(0,1)=0$,且当 $(x,y)\neq(0,1)$ 时 $z>0$,故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z(P_0)=0$(实际是最小值).

【3622】 $z=x^2-(y-1)^2$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2(y-1)=0\end{cases}$$

得临界点 $P_0(0,1)$.由于 $A=z''_{xx}(0,1)=2$, $B=z''_{xy}(0,1)=0$, $C=z''_{yy}(0,1)=-2$ 且 $AC-B^2=-4<0$,故极值不存在(或用该点附近的 z 值可正可负说明).

【3623】 $z=(x-y+1)^2$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2(x-y+1)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2(x-y+1)=0\end{cases}$$

得临界点分布在直线 $x-y+1=0$ 上.对于此直线上的点均有 $z=0$,但是 $z\geqslant 0$ 恒成立.因此,函数 z 在直线 $x-y+1=0$ 上的各点取得极小值 $z=0$.

【3624】 $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y-2=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-x+2y+1=0\end{cases}$$

得临界点 $P_0(1,0)$.由于 $A=z''_{xx}(1,0)=2$, $B=z''_{xy}(1,0)=-1$, $C=z''_{yy}(1,0)=2$ 且 $AC-B^2=3>0$,故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z(P_0)=-1$.

【3625】 $z=x^2y^3(6-x-y)$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy^3(12-3x-2y)=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y^2(18-3x-4y)=0\end{cases}$$
得临界点 $P_0(2,3)$. 并且直线 $x=0$ 及直线 $y=0$ 上的点都是临界点.

不难断定在点 P_0, $A=-162$, $B=-108$, $C=-144$, $AC-B^2>0$,故函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0)=108$.

在直线 $x=0$ 及 $y=0$ 上的各点均有 $z=0$. 先分析直线$y=0$的情况. 在直线上 $x\neq 0$ 及 $x\neq 6$ 处, $x^2(6-x-y)\neq 0$,在确定点的足够小的邻域内也不变号,但是 y^3 可正可负,因此,函数 z 变号,即在上述情况下没有极值. 当 $x=0$ 及 $x=6$ 类似地可判断也无极值.

其次,分析直线 $x=0$ 的情况. 在直线上 $y=0$ 及 $y=6$ 的点的情况类似地可判断无极值,但当 $0<y<6$ 时, $y^3(6-x-y)>0$,且在所讨论点的足够小的邻域内保持正号. 因此,在足够小的邻域内, $z=x^2y^3\cdot(6-x-y)\geqslant 0$ 也成立,但邻域内任意近处总有 $z=0$ 的点. 于是,对于 $x=0$, $0<y<6$ 的点函数 z 取得弱极小值 $z=0$. 同法可判定,对于直线 $x=0$ 上 $y<0$ 及 $y>6$ 的各点处,函数 z 取得弱极大值 $z=0$.

【3626】 $z=x^3+y^3-3xy$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}$$
得临界点 $P_0(0,0)$及 $P_1(1,1)$.

不难断定,在点 P_0 有 $A=0$, $B=-3$, $C=0$ 及 $AC-B^2=-9<0$,故无极值;而在点 P_1 有 $A=6$, $B=-3$, $C=6$ 及$AC-B^2=27>0$,故函数 z 在该点取得极小值 $z(P_1)=-1$.

【3627】 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$$
得临界点 $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$及 $P_2(-1,-1)$.

在点 P_0 附近,当 $x=y$ 且足够小时,有 $z=2x^4-4x^2<0$;但当 $x=-y$ 时, $z=2x^4>0$,因此,在点 P_0 无极值.

不难断定,在点 P_1 及 P_2 均有 $A=10$, $B=-2$, $C=10$ 及 $AC-B^2=96>0$,故函数 z 在点 P_1 及 P_2 取得极小值 $z=-2$.

【3628】 $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ $(x>0,\ y>0)$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-\dfrac{50}{x^2}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{20}{y^2}=0\end{cases}$$
得临界点 $P_0(5,2)$. 不难断定,在该点有 $A=\dfrac{4}{5}$, $B=1$, $C=5$ 及 $AC-B^2=3>0$,故函数 z 在该点取得极小值 $z(P_0)=30$.

【3629】 $z=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,\ b>0)$.

解 考虑函数 $u=z^2=x^2y^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. 显然 z 的极值均为 u 的极值;且 u 在点(x,y)取得的极值不为零时, z 也在点(x,y)取得极值; u 在点(x,y)取得的极值为零时,情况复杂一些,但对 z 也不难讨论.

解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-\dfrac{2}{a^2}x^3y^2=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2x^2y\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-\dfrac{2}{b^2}x^2y^3=0\end{cases}$$

得临界点 $P_0(0,0)$, $P_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $P_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 及 $P_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

由于 z 在点 P_0 附近变号,所以,$z(P_0)$不是极值.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^2\left(1-\frac{6x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{6y^2}{b^2}\right),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xy\left(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right).$$

在 P_1,P_2,P_3,P_4 各点,得 $A=-\frac{8}{9}b^2$, $B=\pm\frac{4}{9}ab$, $C=-\frac{8}{9}a^2$, $AC-B^2=\left(\frac{64}{81}-\frac{16}{81}\right)a^2b^2>0$,

故函数 u 取得极大值. 于是,相应地函数 z 在点 P_1 及 P_2 取得极大值 $z(P_1)=z(P_2)=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$;而在点 P_3 及 P_4 取得极小值$z(P_3)=z(P_4)=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

【3630】 $z=\dfrac{ax+bx+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

解 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,则

$$z(x,y)=z(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\frac{ar\cos\varphi+br\sin\varphi+c}{\sqrt{r^2+1}}.$$

解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{a\cos\varphi+b\sin\varphi-cr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}=0, & (1)\\ \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}=\dfrac{-ar\sin\varphi+br\cos\varphi}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}=0. & (2)\end{cases}$$

先设 a,b 不同时为零. 由(2)考虑到 $r=0$ 不是解($r=0$, φ 为任意值不满足(1)式),故有 $a\sin\varphi=b\cos\varphi$. 于是,

$$\cos\varphi=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

显见当 $c=0$ 时无解[因由(1)有 $a\cos\varphi+b\sin\varphi=0$,再由(3)得 $a=b=0$. 与 a,b 不同时为零之假定矛盾]. 当 $c\neq 0$ 时,

$$r=\frac{a\cos\varphi+b\sin\varphi}{c}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

为保证 $r>0$,在 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 前取与 c 一致的符号. 此时,有

$$x=\frac{a}{c},\qquad y=\frac{b}{c}.$$

由于这时

$$z''_{rr}=-\frac{c(1+3r^2)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}},\qquad z''_{\varphi\varphi}=-\frac{cr^2}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}},\ z''_{r\varphi}=0\quad 及\quad z''_{rr}z''_{\varphi\varphi}-(z''_{r\varphi})^2>0.$$

故当 $c>0$ 时 $z''_{rr}<0$,函数 z 在点 $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$取得极大值 $z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;当 $c<0$ 时 $z''_{rr}>0$,函数 z 在点 $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$取得极小值$z=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

下设 $a=b=0$. 由假定 $a^2+b^2+c^2\neq 0$ 知 $c\neq 0$. 此时解方程组(1),(2)得 $r=0$,φ 任意;即 $x=0$, $y=0$. 由于这时$z=\dfrac{c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$,故显然知:当 $c>0$ 时,z 在点$(0,0)$取极大值$z=c$;当 $c<0$ 时,z 在点$(0,0)$取极小值 $z=c$.

综合上述结果,得结论:若 $c>0$,则 z 在点 $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$取极大值 $z_{极大}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;若 $c<0$,则 z 在点

$\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$取极小值$z_{极小}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；若$c=0$(由假定，这时$a^2+b^2\neq 0$)，则$z$无极值.

注 此题也可不作变量代换$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$（极坐标），而直接在直角坐标x,y下进行讨论，即解方程组$\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$并计算$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$之值. 但此法计算较繁，没有用极坐标简单.

【3631】 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

提示 注意点$(0,0)$为偏导数无意义的点，但当$(x,y)\neq(0,0)$时，恒有$z<1$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

点$(0,0)$为偏导数无意义的点. 当$(x,y)\neq(0,0)$时，$z<1$，故$z(0,0)=1$为极大值.

【3632】 $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+8x-3y)=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=3e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2-2x+2y)=0\end{cases}$$

得临界点$P_0(0,0)$及$P_1\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+16x-6y+4),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=9e^{2x+3y}\left(8x^2-6xy+3y^2-4x+4y+\frac{2}{3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+6x-y-1).$$

在点P_0，$A=16$，$B=-6$，$C=6$及$AC-B^2=60>0$，故函数z取得极小值$z(P_0)=0$；在点P_1，$A=14e^{-2}$，$B=-9e^{-2}$，$C=\frac{3}{2}e^{-2}$及$AC-B=-60e^{-4}<0$，故无极值.

【3633】 $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

解 解方程组
$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{x^2-y}(5x-2x^2+xy-1)=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2-y}(2x-y-4)=0\end{cases}$$

得临界点$P_0(1,-2)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^{x^2-y}(10x^2-4x^3+2x^2y-6x+y+5),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x^2-y}(3-2x+y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x^2-y}(2x^2-xy-4x+1).$$

在点P_0，$A=-2e^3$，$B=2e^3$，$C=-e^3$及$AC-B^2=-2e^6<0$，故无极值.

【3634】 $z=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=5e^{-(x^2+xy+y^2)}-(5x+7y-25)(2x+y)e^{-(x^2+xy+y^2)}=0, & (1)\\ \frac{\partial z}{\partial y}=7e^{-(x^2+xy+y^2)}-(5x+7y-25)(x+2y)e^{-(x^2+xy+y^2)}=0. & (2)\end{cases}$$

(1)×7−(2)×5，消去因子$e^{-(x^2+xy+y^2)}$，得

$$3(5x+7y-25)(3x-y)=0.$$

以$5x+7y-25=0$代入(1)，(2)，显然矛盾，故必有$5x+7y-25\neq 0$，从而$y=3x$. 代入(1)，得

$$26x^2-25x-1=0,$$

解得临界点$P_0(1,3)$及$P_1\left(-\frac{1}{26},-\frac{3}{26}\right)$. 在点$P_0$，

$$A=z''_{xx}(P_0)=[z'_x(x,3)]'_x\Big|_{x=1}=\{e^{-(x^2+3x+9)}[5-(5x-4)(2x+3)]\}'_x\Big|_{x=1}$$

$$=[e^{-(x^2+3x+9)}]'\Big|_{x=1}[5-(5x-4)(2x+3)]\Big|_{x=1}+[e^{-(x^2+3x+9)}]\Big|_{x=1}[5-(5x-4)(2x+3)]'\Big|_{x=1}$$

$$=-27e^{-13}.$$

同法可求得

$$B=z''_{xy}(P_0)=-36e^{-13},\ C=z''_{yy}(P_0)=-51e^{-13}.$$

于是，$AC-B^2=81e^{-26}>0$，故函数 z 在点 P_0 取得极大值

$$z(P_0)=e^{-13}\approx 2.26\times 10^{-6}.$$

同法可得函数 z 在点 P_1 取得极小值

$$z(P_1)=-26e^{-\frac{1}{52}}\approx -25.50.$$

【3635】 $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y-\dfrac{4}{x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=x+2y-\dfrac{10}{y}=0\end{cases}\quad (x>0,\ y>0)$$

得临界点 $P_0(1,2)$. 在点 P_0，$A=6$，$B=1$，$C=\dfrac{9}{2}$，$AC-B^2=26>0$，故函数 z 在点 P_0 取得极小值

$$z(P_0)=7-10\ln 2\approx 0.0685.$$

【3636】 $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)\ (0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2};0\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2})$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos x-\sin(x-y)=0, & (1)\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\sin y+\sin(x-y)=0. & (2)\end{cases}$$

(1)+(2)，$\cos x=\sin y$. 由于 x,y 均为锐角，故有 $y=\dfrac{\pi}{2}-x$，代入(1)，得

$$\cos x-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x+\cos 2x=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0.$$

但是 $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$，故 $\cos\dfrac{3x}{2}=0$. 从而得临界点 $P_0(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6})$. 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x-\cos(x-y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos y-\cos(x-y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x-y),$$

故在点 P_0，有 $A=-\sqrt{3}$，$B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$C=-\sqrt{3}$，$AC-B^2=\dfrac{9}{4}>0$.

于是，函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0)=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

【3637】 $z=\sin x\sin y\sin(x+y)\ (0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin y\sin(2x+y)=0, & (1)\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin x\sin(x+2y)=0. & (2)\end{cases}$$

由(1)及(2)可得下列四个方程组：

$$\text{I}:\begin{cases}\sin x=0,\\ \sin y=0.\end{cases}\qquad \text{II}:\begin{cases}\sin x=0,\\ \sin(2x+y)=0.\end{cases}\qquad \text{III}:\begin{cases}\sin y=0,\\ \sin(x+2y)=0.\end{cases}\qquad \text{IV}:\begin{cases}\sin(2x+y)=0,\\ \sin(x+2y)=0.\end{cases}$$

考虑到 $0\leqslant x\leqslant\pi$；$0\leqslant y\leqslant\pi$，于是得原方程组(1)与(2)的六个解

$$P_1(0,0),\quad P_2(0,\pi),\quad P_3(\pi,0),\quad P_4(\pi,\pi),\quad P_5\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),\quad P_6\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right).$$

由于所考虑的区域是闭正方形 $0\leqslant x\leqslant\pi$；$0\leqslant y\leqslant\pi$，故点 P_1,P_2,P_3,P_4 都是此区域的边界点. 因此，P_1,P_2,P_3,P_4 不是函数 z 达极值的点（根据极值的定义，首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义）. 由于

$$z''_{xx}=2\sin y\cos(2x+y),\qquad z''_{xy}=\sin 2(x+y),\qquad z''_{yy}=2\sin x\cos(x+2y).$$

在点 P_5 有

$$AC-B^2=(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2>0$$

且 $A=-\sqrt{3}<0$，故函数 z 在点 P_5 取得极大值 $z(P_5)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$；在点 P_6 有 $AC-B^2=(\sqrt{3})(\sqrt{3})-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2>0$ 且 $A=\sqrt{3}>0$，故函数 z 在点 P_6 取得极小值 $z(P_6)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

【3638】 $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\arctan\frac{y}{x}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{3y}{x^2+y^2}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2+\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{3x}{x^2+y^2}=0\end{cases}$$

得临界点 $P_0(1,1)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-x^2+6xy+y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-6xy-y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

在点 P_0 有 $A=\frac{3}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=-\frac{3}{2}$ 及 $AC-B^2=-\frac{5}{2}<0$，故无极值.

【3639】 $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0, & (1)\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}=0. & (2)\end{cases}$$

将(1)式乘以 x 减去(2)式乘以 y，得 $\qquad \dfrac{2xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)=0.$

于是，$x=0$，$y=0$，$x=y$，$x=-y$ 为四组解，对应地得临界点

$$P_1(0,1),\quad P_2(0,-1),\quad P_3(1,0),\quad P_4(-1,0),$$

$$P_5\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right),P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right),P_7\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)\text{ 及 }P_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right).$$

代入原式，不难看出，函数 z 在点 P_1、P_2、P_3 及 P_4 均无极值(邻域内函数值可正可负). 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\ln(x^2+y^2)+\frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

在点 P_5 及 P_6，$A=2$，$B=0$，$C=2$ 及 $AC-B^2=4>0$，故函数 z 在点 P_5 及 P_6 取得极小值

$$z(P_5)=z(P_6)=-\frac{1}{2e}\approx-0.184.$$

在点 P_7 及 P_8，$A=-2$，$B=0$，$C=-2$ 及 $AC-B^2=4>0$，故函数 z 在点 P_7 及 P_8 取极大值

$$z(P_7)=z(P_8)=\frac{1}{2e}\approx 0.184.$$

【3640】 $z=x+y+4\sin x\sin y$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+4\cos x\sin y=0, & (1)\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=1+4\sin x\cos y=0. & (2)\end{cases}$$

(2)－(1)得 $\sin(x-y)=0$，故 $x-y=n\pi$；

(2)＋(1)得 $\sin(x+y)=-\frac{1}{2}$，故 $x+y=m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}$.

于是，得临界点 $P_0(x_0,y_0)$，其中

$$\begin{cases} x_0=(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12}+(m+n)\dfrac{\pi}{2}, \\ y_0=(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12}+(m-n)\dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

在点 P_0，有

$$\begin{aligned} AC-B^2 &=(-4\sin x_0\sin y_0)(-4\sin x_0\sin y_0)-(4\cos x_0\cos y_0)^2 \\ &=16(\sin x_0\sin y_0-\cos x_0\cos y_0)(\sin x_0\sin y_0+\cos x_0\cos y_0)=-16\cos(x_0+y_0)\cos(x_0-y_0) \\ &=-16\cos\left[m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}\right]\cos n\pi=-16(-1)^{m+n}\cos\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

当 m 及 n 有相同的奇偶性时，$m+n$ 为偶数，$AC-B^2<0$ 故无极值；当 m 及 n 有不同的奇偶性时，$m+n$ 为奇数，$AC-B^2>0$，故有极值，看 A 的符号决定取得极大值还是极小值. 由于

$$A=-4\sin x_0\sin y_0=2[\cos(x_0+y_0)-\cos(x_0-y_0)]=2\left\{(-1)^m\cos\frac{\pi}{6}-(-1)^n\right\},$$

故当 m 为奇数及 n 为偶数时，$A<0$，取得极大值；当 m 为偶数及 n 为奇数时，$A>0$，取得极小值. 极值为

$$z(x_0,y_0)=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2(-1)^n.$$

【3641】 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)=0 \end{cases}$$

得临界点 $P_0(0,0)$ 及 $P(x_0,y_0)$，其中 $x_0^2+y_0^2=1$.

在点 P_0 有 $z=0$，而当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时 $z>0$，故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z=0$.

由 1437 题知，在满足 $x_0^2+y_0^2=1$ 的点 (x_0,y_0) 的邻域内，不论是 $x^2+y^2>1$ 还是 $x^2+y^2<1$，均有

$$z(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}<e^{-1}.$$

但是点 (x_0,y_0) 的邻域内总有 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y)，因此，函数 z 在点 (x_0,y_0) 取得弱极大值 $z=e^{-1}$.

【3642】 $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

解 $du=2(x+1)dx+2(y+2)dy+2(z-3)dz$.

令 $$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x+1)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2(y+2)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2(z-3)=0,$$

得临界点 $P_0(-1,-2,3)$. 在该点由于

$$d^2u=2(dx^2+dy^2+dz^2)>0 \quad (当\ dx^2+dy^2+dz^2\neq0\ 时),$$

故函数 u 在点 P_0 取得极小值 $u(P_0)=-14$.

【3643】 $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

解 $du=(3x^2+12y)dx+(2y+12x)dy+(2z+2)dz$.

令 $$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12y=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+12x=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z+2=0,$$

得临界点 $P_0(0,0,-1)$ 及 $P_1(24,-144,-1)$.

$$d^2u=6xdx^2+2dy^2+2dz^2+24dxdy.$$

在点 P_0，有

$$d^2u=2dy^2+2dz^2+24dxdy=2dz^2+2dy(dy+12dx),$$

当 $dz=0$，$dy>0$ 及 $dy+12dx<0$ 时，$d^2u<0$；而当 dx、dy 及 dz 均大于零时，$d^2u>0$. 因此，d^2u 的符号不定，故无极值.

在点 P_1，有

$$d^2u=144dx^2+2dy^2+2dz^2+24dxdy=(12dx+dy)^2+dy^2+2dz^2>0 \quad (dx^2+dy^2+dz^2\neq0),$$

故函数 u 在点 P_1 取得极小值 $u(P_1)=-6913$.

【3644】 $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}\quad(x>0,\ y>0,\ z>0).$

解 $du=\left(1-\frac{y^2}{4x^2}\right)dx+\left(\frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}\right)dy+\left(\frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}\right)dz.$ 令 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$,得方程组

$$\begin{cases}1-\frac{y^2}{4x^2}=0,\\ \frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0,\\ \frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}=0.\end{cases}$$

解之得临界点 $P_0\left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

$$d^2u=\frac{y^2}{2x^3}dx^2-\frac{y}{x^2}dxdy+\left(\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3}\right)dy^2-\frac{4z}{y^2}dydz+\left(\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}\right)dz^2.$$

在点 P_0,有

$$d^2u=4dx^2-4dxdy+3dy^2-4dydz+6dz^2=(2dx-dy)^2+dy^2+(dy-2dz)^2+2dz^2>0\quad(dx^2+dy^2+dz^2\neq0),$$

故函数 u 在点 P_0 取得极小值 $u(P_0)=4$.

【3645】 $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)\quad(a>0).$

解 $du=y^2z^3(a-2x-2y-3z)dx+2xyz^3(a-x-3y-3z)dy+3xy^2z^2(a-x-2y-4z)dz.$

令 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$,得方程组

$$\begin{cases}y^2z^3(a-2x-2y-3z)=0,\\ 2xyz^3(a-x-3y-3z)=0,\\ 3xy^2z^2(a-x-2y-4z)=0.\end{cases}$$

解之得临界点 $P_0(\frac{a}{7},\frac{a}{7},\frac{a}{7})$;直线 $x=0,\ 2y+3z=a$;平面$y=0$;平面 $z=0$.

同 3625 题的方法,不难确定:直线 $x=0,\ 2y+3z=a$ 及平面 $z=0$ 上的点不取得极值. $y=0$ 时,当 $xz^3(a-x-3z)>0$ 取得弱极小值 $u=0$;当 $xz^3(a-x-3z)<0$ 取得弱极大值 $u=0$;当 $xz^3(a-x-3z)=0$ 不取得极值.

在点 P_0,有

$$\begin{aligned}d^2u&=-\frac{2a^5}{7^5}(dx^2+3dy^2+6dz^2+2dxdy+6dydz+3dxdz)\\&=-\frac{a^5}{7^5}[(dx+2dy+3dz)^2+dx^2+2dy^2+3dz^2]<0\qquad(dx^2+dy^2+dz^2\neq0),\end{aligned}$$

故函数 u 在点 P_0 取得极大值 $u(P_0)=\frac{a^7}{7^7}$.

【3646】 $u=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b}(x>0,y>0,z>0,a>0,b>0).$

解 $du=\left(\frac{2x}{y}-\frac{a^2}{x^2}\right)dx+\left(\frac{2y}{z}-\frac{x^2}{y^2}\right)dy+\left(\frac{2z}{b}-\frac{y^2}{z^2}\right)dz.$ 令 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$,得方程组

$$\begin{cases}\frac{2x}{y}-\frac{a^2}{x^2}=0,\\ \frac{2y}{z}-\frac{x^2}{y^2}=0,\\ \frac{2z}{b}-\frac{y^2}{z^2}=0.\end{cases}$$

解之得临界点 $P_0\left(\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b},\frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b},\frac{1}{2}\sqrt[15]{\frac{1}{4}a^8b^7}\right)$.

$$d^2u=\frac{2a^2}{x^3}dx+\frac{2}{y}dx^2-\frac{4x}{y^2}dxdy+\frac{2}{z}dy^2+\frac{2x^2}{y^3}dy^2-\frac{4y}{z^2}dydz+\frac{2}{b}dz^2+\frac{2y^2}{z^3}dz^2$$
$$=\frac{2a^2}{x^3}dx^2+\frac{2}{y}\left(dx-\frac{x}{y}dy\right)^2+\frac{2}{z}\left(dy-\frac{y}{z}dz\right)^2+\frac{2}{b}dz^2.$$

在点 P_0，$x>0,y>0,z>0,d^2u>0(dx^2+dy^2+dz^2\neq0)$，故函数 u 在点 P_0 取得极小值

$$u(P_0)=\frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}.$$

【3647】 $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)\qquad(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi;\ 0\leqslant z\leqslant\pi).$

解 $du=[\cos x-\cos(x+y+z)]dx+[\cos y-\cos(x+y+z)]dy+[\cos z-\cos(x+y+z)]dz.$

令 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases}\cos x-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos y-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos z-\cos(x+y+z)=0.\end{cases}$$

注意到 $0\leqslant x\leqslant\pi;0\leqslant y\leqslant\pi;0\leqslant z\leqslant\pi$，解之得临界点 $P_0(0,0,0)$，$P_1(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 及 $P_2(\pi,\pi,\pi)$.

在点 P_1，有

$$d^2u=-\sin x dx^2-\sin y dy^2-\sin z dz^2+\sin(x+y+z)[d(x+y+z)]^2$$
$$=-dx^2-dy^2-dz^2-(dx+dy+dz)^2<0,$$

故函数 u 在点 P_1 取得极大值 $u(P_1)=4$.

由于 P_0 与 P_2 是所考虑区域 $0\leqslant x\leqslant\pi;0\leqslant y\leqslant\pi;0\leqslant z\leqslant\pi$ 的边界点，故函数在点 P_0 与 P_2 不达极值(根据极值定义，首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义). 但如果放宽要求，对于边界点，仅将其函数值与属于所考虑的区域而与此边界点很接近的点的函数值相比较，则在边界点也可引入达极值和达弱极值的概念. 今对于点 P_0 及 P_2 的邻域中且属于上述区域的点 (x,y,z)，显然有 $\sin x\geqslant0$，$\sin y\geqslant0$，$\sin z\geqslant0$. 又

$$\sin(x+y+z)=\sin x\cos y\cos z-\sin x\sin y\sin z+\cos x\sin y\cos z+\cos x\cos y\sin z$$
$$\leqslant\sin x+\sin y+\sin z-\sin x\sin y\sin z,$$

故 $u\geqslant0$. 而当 $x=y=0$ 时或 $x=y=\pi$ 时都恒有 $u=0$. 因此，函数 u 在点 P_0 及 P_2 都达到弱极小值 $u(P_0)=u(P_2)=0$(按上述边界点达极值的意义).

【3648】 $u=x_1x_2^2\cdots x_n^n(1-x_1-2x_2-\cdots-nx_n)\quad(x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0).$

解 先考虑满足 $1-x_1-2x_1-\cdots-nx_n=0$，$x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0$ 的点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 显然函数 u 在这种点不达到极值(因为，例如，若保持 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 不变，而将 x_1 增大任意小的值，就有 $u<0$，但将 x_1 减小任意小的值，则有 $u>0$)，故下面只需考察满足 $1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k\neq0,x_1>0,\cdots,x_n>0$ 的点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 我们有

$$du=u\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{x_k}dx_k-\frac{u}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}\sum_{k=1}^{n}kdx_k=u\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}\right)dx_k\right],$$

考虑到 $x_k>0$ 及 $1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k\neq0$，故有 $u\neq0$. 解方程组

$$\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}=0\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

得临界点 $P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $\quad x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}=x_0.$

$$d^2u=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}\right)dx_k\right]du+u\left[\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{x_k^2}\right)dx_k^2+\frac{1}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{n}kdx_k\right)^2}\left(\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)\left(-\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)\right],$$

在点 P_0，有

$$d^2u=-\frac{u}{x_0^2}\left[\sum_{k=1}^{n}kdx_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)^2\right]=-x_0^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\left[\sum_{k=1}^{n}kdx_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)^2\right]<0\quad\left(\sum_{k=1}^{n}dx_x^2\neq 0\right),$$

故函数 u 在点 P_0 取得极大值 $u(P_0)=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$.

【3649】 $u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{2}{x_n}\quad(x_i>0,\ i=1,2,\cdots,n).$

解题思路 令
$$y_1=x_1,y_2=\frac{x_2}{x_1},\cdots,y_k=\frac{x_k}{x_{k-1}},\cdots,y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}},$$
则 $x_n=y_1y_2\cdots y_n$，且 $u=y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n+\frac{2}{y_1y_2\cdots y_n}$，并记 $A=y_1y_2\cdots y_n$. 用微分法可得临界点为 $P_0(2^{\frac{1}{n+1}},2^{\frac{2}{n+1}},\cdots,2^{\frac{n}{n+1}})$，且在 P_0 点处，函数 u 取得极小值 $(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

解 设 $y_1=x_1,y_2=\frac{x_2}{x_1},\cdots,y_k=\frac{x_k}{x_{k-1}},\cdots,y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}$，则$x_n=y_1y_2\cdots y_n$，$y_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$，且

$$u=y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n+\frac{2}{y_1y_2\cdots y_n}.$$

记 $A=y_1y_2\cdots y_n$，则可得

$$du=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{Ay_k}\right)dy_k.$$

令$\frac{\partial u}{\partial y_k}=0$ 得方程组 $1-\frac{2}{Ay_k}=0\ (k=1,2,\cdots,n)$. 解之得临界点 $P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=2^{\frac{1}{n+1}}=y_0.$$

在点 P_0，有

$$d^2u\Big|_{P=P_0}=\frac{2}{A}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_k^2}dy_k^2+\frac{2}{A}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_k}dy_k\right)^2\Big|_{P=P_0}=\frac{1}{y_0}\left[\sum_{k=1}^{n}dy_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}dy_k\right)^2\right]>0\quad\left(\sum_{k=1}^{n}dy_k^2\neq 0\right),$$

故函数 u 在 P_0 点取得极小值，也即在

$$x_1=y_1=2^{\frac{1}{n+1}},$$
$$x_2=y_2x_1=2^{\frac{2}{n+1}},$$
$$\vdots$$
$$x_k=y_kx_{k-1}=2^{\frac{k}{n+1}},$$
$$\vdots$$
$$x_n=y_nx_{n+1}=2^{\frac{n}{n+1}}$$

处，函数 u 取得极小值 $u=(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

【3650】 惠更斯问题. 在 a 和 b 二正数间插入 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使分数

$$u=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

的值最大.

解题思路 令 $w=\frac{1}{u}$ 及 $y_1=\frac{x_2}{x_1},y_2=\frac{x_3}{x_2},\cdots,y_n=\frac{b}{x_n}$，并记 $A=y_1y_2\cdots y_n$ 及 $m=a+\frac{b}{A}$，则

$$w=m(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n).$$

从而，问题转化为求函数 w 的极小值. 用微分法可知数 $a,x_1,x_2,\cdots,x_n,b$ 构成有公比 $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的等比数列时，函数 u 取得最大值 $\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{-(n+1)}$.

解 记 $w=\frac{1}{u}=(a+x_1)\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)\left(1+\frac{x_3}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{b}{x_n}\right)$.

设 $y_1=\frac{x_2}{x_1}, y_2=\frac{x_3}{x_2}, \cdots, y_n=\frac{b}{x_n}$，并记 $A=y_1y_2\cdots y_n$，则有

$$x_1=\frac{b}{y_1y_2\cdots y_n}=\frac{b}{A}, \quad w=\left(a+\frac{b}{A}\right)(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n).$$

又记 $m=a+\frac{b}{A}$，则有 $\mathrm{d}w=\sum_{k=1}^{n}\frac{w}{1+y_k}\mathrm{d}y_k-\frac{wb}{mA}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}=w\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}$.

令 $\frac{\partial w}{\partial y_k}=0$ 得方程组 $\frac{y_k}{1+y_k}=\frac{b}{mA}$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 解之得临界点 $P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}=y_0.$$

在点 P_0，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2w\Big|_{P=P_0}&=w\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}\Big|_{P=P_0}\\
&=w\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y_k}{y_0}\right)\Big|_{P=P_0}-w\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}y_k}{y_0}\left[\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}A}\right)\right]\Big|_{P=P_0}\\
&=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2+\frac{w(P_0)}{y_0\left(1+\frac{a}{b}A\right)^2_{P=P_0}}\sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{d}y_k\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aA}{by_k}\mathrm{d}y_k\right)\right]_{P=P_0}\\
&=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k\right)^2\right]>0 \quad \left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2\neq 0\right),
\end{aligned}$$

故函数 w 在点 P_0 取得极小值. 从而，函数 u 在

$$\begin{cases}
x_1=\frac{b}{A}=\frac{b}{y_0^n}=\frac{b}{a}ay_0^{-n}=ay_0^{n+1}y_0^{-n}=ay_0,\\
x_2=x_1y_1=ay_0^2,\\
x_3=x_2y_2=ay_0^3,\\
\quad\vdots\\
x_n=\frac{b}{y_n}=\frac{b}{a}ay_0^{-1}=ay_0^{n+1}y_0^{-1}=ay_0^n,
\end{cases}$$

即数 $a,x_1,x_2,\cdots,x_n,b$，构成有公比 $y_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的等比数列时，其值最大，并且 u 的最大值为

$$u=\frac{1}{a(1+y_0)^{n+1}}=\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{-(n+1)}$$

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值：

【3651】 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

提示 一般地，对于隐函数 $z=z(x,y)$ 求极值用微分法较好，如本题及3652题及3653题.

解 微分得

$$(x-1)\mathrm{d}x+(y+1)\mathrm{d}y+(z-2)\mathrm{d}z=0.$$

显见，当 $x=1, y=-1$，时，$\mathrm{d}z=0$. 代入原方程可解得 $z=6$ 及 $z=-2$. 又 $z=2$ 时为不可微的. 为判断极值，求二阶微分，得

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+(z-2)\mathrm{d}^2z+\mathrm{d}z^2=0.$$

以 $x=1,\ y=-1,\ z=6$，代入，并考虑 $\mathrm{d}z=0$，得

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{4}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)<0 \quad (\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\neq 0),$$

故当 $x=1,y=-1$ 时,隐函数 z 取得极大值 $z=6$. 同法可判断得:当 $x=1$, $y=-1$ 时,隐函数 z 也取得极小值,且其值为 $z=-2$.

不难看出,$z=2$ 是球的切平面平行于 Oz 轴的地方,因此,函数 z 不取得极值.

【3652】 $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

解 微分一次,得

$$(2x-z+2)\mathrm{d}x+(2y-z+2)\mathrm{d}y+(2z-x-y+2)\mathrm{d}z=0.$$

解方程组

$$\begin{cases}2x-z+2=0,\\2y-z+2=0,\\x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0\end{cases}$$

得

$$x_1=y_1=-(3+\sqrt{6}),\quad z_1=-(4+2\sqrt{6});\quad x_2=y_2=-(3-\sqrt{6}),\quad z_2=2\sqrt{6}-4.$$

再微分一次,并注意到 $\mathrm{d}z=0$,即得

$$2\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+(2z-x-y+2)\mathrm{d}^2z=0.$$

在点(x_1,y_1,z_1), $\mathrm{d}^2z=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}z^2)>0$,故当 $x=y=-(3+\sqrt{6})$时,取得极小值 $z=-(4+2\sqrt{6})$. 同法可知,当$x=y=-(3-\sqrt{6})$时,取得极大值 $z=2\sqrt{6}-4$.

对于 $\mathrm{d}z$ 的系数 $2z-x-y+2=0$ 时代表的情况,与上题类似也不取得极值.

【3653】 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

解 微分一次,得

$$2(x^2+y^2+z^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=a^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z).$$

令 $\mathrm{d}z=0$,得方程

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0.$$

解之,得 $x=y=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$.

以 $x=y=0$ 代入原方程,解得 $z=0$. 这是隐函数的一个奇点. 把原式看作 z^2 的一个方程,舍去增根,可解出

$$z^2=-(a^2+x^2+y^2)+\sqrt{a^4+3a^2(x^2+y^2)},$$

显然 z 有正负两支在(0,0,0)点相交. 因此,不认为 z 在(0,0,0)点取得极值.

以 $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$代入原方程,解得

$$x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2,\qquad z^2=\frac{a^2}{8}.$$

为考虑极值,将一次微分式改写为

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+[2(x^2+y^2+z^2)+a^2]z\mathrm{d}z=0.$$

将上式再微分一次,注意到 $\mathrm{d}z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$,即得

$$a^2z\mathrm{d}^2z=-2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2,$$

故当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2$, $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$,时,$\mathrm{d}^2z\leqslant0$,函数 z 取得弱极大值$z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$;当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2$, $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$时,$\mathrm{d}^2z\geqslant0$,函数 z 取得弱极小值 $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

求下列函数的条件极值点:

【3654】 $z=xy$, 若 $x+y=1$.

提示 如将 $z=xy$ 改写为 $z=x(1-x)$，则转化为普通的极值问题.

解 设 $F(x,y)=xy+\lambda(x+y-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+\lambda=0,\\ x+y=1\end{cases}$$

得 $x=y=-\lambda=\frac{1}{2}$，$z=\frac{1}{4}$. 由于当 $x\to\pm\infty$ 时，$y\to\mp\infty$，故 $z=xy\to-\infty$. 从而得知：点 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 为条件极值点，且 $z=\frac{1}{4}$ 为极大值.

如将 $z=xy$ 改写为 $z=y(1-y)$，则成为普通极值. 易知极大值点为 $y=\frac{1}{2}$，从而，$x=\frac{1}{2}$，$z=\frac{1}{4}$.

【3655】 $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，若 $x^2+y^2=1$.

解 设 $F(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\lambda(x^2+y^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{a}+2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{1}{b}+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

可得
$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2|ab|},\quad x=\mp\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\mp\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

其中 $\varepsilon=\operatorname{sgn}ab\neq0$. 相应地，$z=\mp\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$.

由于函数 z 在闭圆周 $x^2+y^2=1$ 上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值，并且最大值与最小值不相等. 这里可疑点仅两个.

因此，当 $x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时，函数值 $z=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ 必为最小值，从而是极小值；当 $x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时，$z=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ 为最大值，从而是极大值.

【3656】 $z=x^2+y^2$，若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

解 设 $F(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+\dfrac{1}{a}\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+\dfrac{1}{b}\lambda=0,\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\end{cases}$$

可得
$$\lambda=-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2},\quad x=\frac{ab^2}{a^2+b^2},\quad y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

由于当 $x\to\infty$，$y\to\infty$ 时，$z\to+\infty$，故函数 z 必在有限处取得最小值. 这里可疑点仅一个. 因此，当 $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$，$y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时，函数 z 取得极小值 $z=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

注 如果用二阶微分判别，则易从 $\mathrm{d}^2z=2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)>0$（不论 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 之间有何约束条件，此式恒成

立)可知 $z=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 为极小值.

【3657】 $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$,若 $x^2+y^2=1$.

解 设 $F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2[(A-\lambda)x+By]=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2[Bx+(C-\lambda)y]=0, & (2)\\ x^2+y^2=1. & (3)\end{cases}$$

由 $x^2+y^2=1$ 知 x,y 不全为零,故 λ 必须满足方程

$$\begin{vmatrix}A-\lambda & B\\ B & C-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2)=0. \quad (4)$$

当 $(A-C)^2+4B^2=0$ 时,所研究的函数为常数;当 $(A-C)^2+4B^2\neq 0$ 时,方程(4)有两个不等的实根,记为 λ_1 和 $\lambda_2(\lambda_1>\lambda_2)$. 由方程组(1)、(2)、(3)可解出

$$x_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-C)^2}},\qquad y_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-A)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-A)^2}},$$

$$x_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-C)^2}},\qquad y_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-A)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-A)^2}}.$$

相应地,有 $$z(x_1,y_1)=Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2=(Ax_1+By_1)x_1+(Bx_1+Cy_1)y_1.$$

由(1)、(2)可解得 $$Ax_1+By_1=\lambda_1x_1,\quad Bx_1+Cy_1=\lambda_1y_1,$$

故得 $$z(x_1,y_1)=\lambda_1x_1^2+\lambda_1y_1^2=\lambda_1(x_1^2+y_1^2)=\lambda_1.$$

同理可得 $$z(x_2,y_2)=\lambda_1,\qquad z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2.$$

由于函数 z 在单位球面上连续且不为常数,故必取得最大值和最小值,并且最大值和最小值不相等. 这里可疑点仅四个,$(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$,而且 $z(x_1,y_1)=z(x_2,y_2)=\lambda_1$,$z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2$. 于是,当 $x=x_{1,2}$,$y=y_{1,2}$ 时,函数 z 取得最大值 $z=\lambda_1$,因而也是极大值;当 $x=x_{3,4}$,$y=y_{3,4}$ 时,函数 z 取得最小值 $z=\lambda_2$,因而也是极小值.

【3658】 $z=\cos^2x+\cos^2y$,若 $x-y=\frac{\pi}{4}$.

解 设 $F(x,y)=\cos^2x+\cos^2y+\lambda(x-y-\frac{\pi}{4})$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=-\sin2x+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\sin2y-\lambda=0,\\ x-y=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

可得 $$x_k=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\quad y_k=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

相应地,当 k 为偶数时,$z=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$;当 k 为奇数时,$z=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

由于所给连续函数 z 必在任意有限区域内取得最大值和最小值,而且 z 又是关于 x、y 的周期(周期为 π)函数,故当 k 为偶数时,函数 z 在点 (x_k,y_k) 取得最大值 $z=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$,从而是极大值;当 k 为奇数时,函数 z 在点 (x_k,y_k) 取得最小值 $z=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$,从而是极小值.

【3659】 $u=x-2y+2z$,若 $x^2+y^2+z^2=1$.

解 设 $F(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=-2+2\lambda y=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2+2\lambda z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

可得
$$x=\pm\frac{1}{3},\quad y=\mp\frac{2}{3},\quad z=\pm\frac{2}{3}.$$

相应地，$u=\pm3$.

由于所给函数在闭球面上连续且不为常数，故必取得最大值及最小值，并且最大值与最小值不相等. 这里可疑点仅两个，于是，当 $x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{2}{3}$，$z=\frac{2}{3}$ 时，函数 u 取得最大值 $u=3$，因而也是极大值；当 $x=-\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$，$z=-\frac{2}{3}$ 时，函数 u 取得最小值 $u=-3$，因而也是极小值.

【3660】 $u=x^my^nz^p$，若 $x+y+z=a$ $(m>0,n>0,p>0,a>0)$ *.

解题思路 本题应加上条件 $x>0,y>0,z>0$. 令

$$w=\ln u=m\ln x+n\ln y+p\ln z,\quad F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+y+z-a).$$

注意到连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分，当点趋于边界上的点时，显然有 $w\to-\infty$. 因此，函数 w 在区域内取得最大值. 再注意到可疑点仅一个，从而，问题可获解.

解 设 $w=\ln u=m\ln x+n\ln y+p\ln z$，$F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+y+z-a)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{m}{x}-\frac{1}{\lambda}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{n}{y}-\frac{1}{\lambda}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{p}{z}-\frac{1}{\lambda}=0,\\ x+y+z=a\end{cases}$$

可得
$$x=\frac{am}{m+n+p},\quad y=\frac{an}{m+n+p},\quad z=\frac{ap}{m+n+p}.$$

相应地，$u=\frac{a^{(m+n+p)}m^mn^np^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$.

连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分，边界由三条直线

$$\begin{cases}x+y=a,\\ z=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}y+z=a,\\ x=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}z+x=a,\\ y=0\end{cases}$$

组成. 当点 P 趋于边界上的点时，显然有 $w\to-\infty$. 因此，函数 w 在区域内取得最大值. 由于可疑点仅一个，故当

$$x=\frac{am}{m+n+p},\quad y=\frac{an}{m+n+p},\quad z=\frac{ap}{m+n+p}$$

时，函数 u 取得最大值 $u=\frac{a^{m+n+p}m^mn^np^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$，因而也是极大值.

【3661】 $u=x^2+y^2+z^2$，若 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$. 解方程组

---

* 作者注：应加上条件 $x>0,y>0,z>0$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x\left(1+\dfrac{\lambda}{a^2}\right)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y\left(1+\dfrac{\lambda}{b^2}\right)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z\left(1+\dfrac{\lambda}{c^2}\right)=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$$

可得

$$x=\pm a,\ y=z=0;\quad x=z=0,\ y=\pm b;\quad x=y=0,\ z=\pm c.$$

相应地，有

$$u(\pm a,0,0)=a^2,\quad u(0,\pm b,0)=b^2,\quad u(0,0,\pm c)=c^2.$$

由于 $a>b>c>0$，故连续函数 u 在点 $(\pm a,0,0)$ 取得最大值 a^2，因而也是极大值；在点 $(0,0,\pm c)=c^2$ 取得最小值 c^2，因而也是极小值.

在点 $(0,\pm b,0)$ 处，对应的 $\lambda=-b^2$，且

$$d^2F=2\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2+2\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2+2\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2=2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)dx^2+2\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)dz^2.$$

把 x,z 当作自变量，y 看成由条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 确定的 x 和 z 的函数. 在点 $(0,\pm b,0)$，有 $d^2u=d^2F$，而 $1-\frac{b^2}{a^2}>0$，$1-\frac{b^2}{c^2}<0$. 因此，d^2u 的符号不定，从而，函数 u 在点 $(0,\pm b,0)$ 不取得极值.

【3662】 $u=xy^2z^3$，若 $x+2y+3z=\frac{a}{6}$ $(x>0,y>0,z>0,a>0)$.

提示 类似 3660 题的讨论.

解 设 $w=\ln u=\ln x+2\ln y+3\ln z$，$F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+2y+3z-a)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{2}{y}-\dfrac{2}{\lambda}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{3}{z}-\dfrac{3}{\lambda}=0,\\ x+2y+3z=a\end{cases}$$

可得

$$x=y=z=\frac{a}{6}.$$

类似 3660 题的讨论可知，函数 u 当 $x=y=z=\frac{a}{6}$ 时取得极大值 $u=\left(\frac{a}{6}\right)^6$.

【3663】 $u=xyz$，若 $x^2+y^2+z^2=1$，$x+y+z=0$.

解 设 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz+2\lambda x+\mu=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz+2\lambda y+\mu=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy+2\lambda z+\mu=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1, & (4)\\ x+y+z=0. & (5)\end{cases}$$

(1)－(2)，(2)－(3)，得

$$\begin{cases}(x-y)(2\lambda-z)=0, & (6)\\ (y-z)(2\lambda-x)=0. & (7)\end{cases}$$

由(6),若 $x-y=0$,代入(5)得 $z=-2x$. 再代入(4),解得临界点

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \quad 和 \quad P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

如果 $x-y\neq0$,则 $z=2\lambda$. 由(7),若 $y-z=0$,类似上面解法可解得临界点

$$P_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad 和 \quad P_4\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

若 $y-z\neq0$,则 $x=2\lambda$,故 $x=z$,类似上面解法又可得临界点

$$P_5\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad 和 \quad P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

相应地,有

$$u(P_1)=u(P_3)=u(P_5)=-\frac{1}{3\sqrt{6}},\qquad u(P_2)=u(P_4)=u(P_6)=\frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

类似前面各题的讨论可知,函数 u 在点 P_1,P_3 及 P_5 取得极小值 $u=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$;在点 P_2,P_4 及 P_6 取得极大值 $u=\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

【3664】 $u=\sin x\sin y\sin z$,若 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ $(x>0,y>0,z>0)$.

提示 仿 3660 题及其讨论.

解 由 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$及 $x>0,y>0,z>0$ 不难得出 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, $0<z<\frac{\pi}{2}$.

设 $w=\ln u=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z$, $F(x,y,z)=w+\lambda(x+y+z-\frac{\pi}{2})$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\cot x+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\cot y+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=\cot z+\lambda=0,\\ x+y+z=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

并注意到点 $P(x,y,z)$在第一卦限,即得临界点 $P_0(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$.

类似 3660 题的讨论,当点(x,y,z)趋于平面 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$在第一卦限部分的边界时,$u\to0$;而在边界内部 $u>0$. 因此,函数 u 在边界内部取得最大值,故在点 P_0 取得极大值 $u(P_0)=\frac{1}{8}$.

【3665】 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$,若 $x^2+y^2+z^2=1$, $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ $(a>b>0,\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$.

解 设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2\left(\dfrac{1}{a^2}-\lambda\right)x+\mu\cos\alpha=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2\left(\dfrac{1}{b^2}-\lambda\right)y+\mu\cos\beta=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2\left(\dfrac{1}{c^2}-\lambda\right)z+\mu\cos\lambda=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1, & (4)\\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0, & (5)\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, & (6)\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、z 然后相加，并注意到(4)、(5)两式，即得

$$\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u(x,y,z). \tag{7}$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，然后相加，并注意到(5)、(6)两式，即得

$$\mu=-2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right). \tag{8}$$

将(8)式代入(1)、(2)、(3)，得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}-\lambda\right)x-\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{b^2}y-\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}z=0,\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}x+\left(\dfrac{\sin^2\beta}{b^2}-\lambda\right)y-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{c^2}z=0,\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{a^2}x-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{b^2}y+\left(\dfrac{\sin^2\gamma}{c^2}-\lambda\right)z=0.\end{cases} \tag{9}$$

要 $\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}$ 为方程组(9)的非零解，必须有

$$\begin{vmatrix}\sin^2\alpha-a^2\lambda & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\beta & \sin^2\beta-b^2\lambda & -\cos\beta\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & \sin^2\gamma-c^2\lambda\end{vmatrix}=0.$$

展开计算得

$$\lambda\left[\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\right]=0. \tag{10}$$

由(7)知 $\lambda\neq0$，且不难验证(10)式在消去 λ 后得到的二次方程有两个不等的实根 $\lambda_1<\lambda_2$.

固定 $\lambda=\lambda_1$，代入方程组(9)，可得到关于(x,y,z)有一个自由度的一个解系，再代入方程(4)，可得对应于 $\lambda=\lambda_1$ 的两个临界点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$. 由(7)知，对应的$u(P_1)=u(P_2)=\lambda_1$. 同理可求得对应于 $\lambda=\lambda_2$ 的两个临界点$P_3(x_3,y_3,z_3)$和 $P_4(x_4,y_4,z_4)$，且有 $u(P_3)=u(P_4)=\lambda_2$.

P_1,P_2,P_3,P_4 为满足方程组(1)～(5)的一切解所对应的点. 类似前面各题的讨论可知，函数 u 在点 P_1 及 P_2 取得极小值 λ_1，而在点 P_3 及 P_4 取得极大值 λ_2.

【3666】$^+$ $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$，若

$$Ax+By+Cz=0,\ x^2+y^2+z^2=R^2,\ \frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma},$$

式中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

解 设 $F(x,y,z)=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2+\lambda(Ax+By+Cz)+\mu(x^2+y^2+z^2-R^2)$.

记 $\xi=\rho\cos\alpha$，$\eta=\rho\cos\beta$，$\zeta=\rho\cos\gamma$，$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2(x-\rho\cos\alpha)+\lambda A+2\mu x=0, & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2(y-\rho\cos\beta)+\lambda B+2\mu y=0, & (2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2(z-\rho\cos\gamma)+\lambda C+2\mu z=0, & (3) \\ x^2+y^2+z^2=R^2, & (4) \\ Ax+By+Cz=0, & (5) \\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. & (6) \end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 A、B、C，然后相加，并注意到(5)式，即得

$$-2\rho(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)+\lambda(A^2+B^2+C^2)=0,\quad \lambda=\frac{2\rho(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2}. \tag{7}$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、z，然后相加，并注意到(4)式和(5)式，即得

$$2(1+\mu)R^2=2\rho(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma). \tag{8}$$

又将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，然后相加，并注意到(6)式，即得

$$\begin{aligned} 2(1+\mu)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma) &= 2\rho-\lambda(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma) \\ &= 2\rho\left[1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

由(8),(9)可得

$$(1+\mu)^2R^2=(1+\mu)\rho(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)=\rho^2\left[1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}\right],$$

即

$$1+\mu=\pm\frac{\rho}{R}\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}. \tag{10}$$

由(1),(2),(3)可得

$$x=\frac{2\rho\cos\alpha-\lambda A}{2(1+\mu)},\quad y=\frac{2\rho\cos\beta-\lambda\beta}{2(1+\mu)},\quad z=\frac{2\rho\cos\gamma-\lambda C}{2(1+\mu)}.$$

把(7)式和(10)式代入上式，即可得 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，其中 P_1 对应于(10)式取正号，而 P_2 对应于(10)式取负号. 下面求 $u(P_1)$ 和 $u(P_2)$. 由(9)、(10)可得

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\pm R\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}.$$

于是，

$$\begin{aligned} u(P_1) &= (x_1-\rho\cos\alpha)^2+(y_1-\rho\cos\beta)^2+(z_1-\rho\cos\gamma)^2 \\ &= (x_1^2+y_1^2+z_1^2)-2\rho(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma)+\rho^2 \\ &= R^2+\rho^2-2\rho R\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}$$

同理可得 $u(P_2)=R^2+\rho^2+2\rho R\sqrt{1-\dfrac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}$.

类似以前各题的讨论可知：$u(P_2)$ 为最大值，$u(P_1)$ 为最小值.

【3667】 $u=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，若 $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}=1$ $(a_i>0;\ i=1,2,\cdots,n)$.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\lambda\left(\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}-1\right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\dfrac{\lambda}{a_i}=0\ (i=1,2,\cdots,n), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}=1 \end{cases}$$

可得临界点 $P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $d^2u=d^2F=2\sum\limits_{i=1}^{n}dx_i^2>0$（它不受约束条件的限制），故当$x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$时，函数 u 取得极小值

$$u=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\right]^2=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}.$$

【3668】 $u=x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p$ $(p>1)$，若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ $(a>0)$.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=px_i^{p-1}+\lambda=0\ (i=1,2,\cdots,n),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a\end{cases}$$

得 $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 由于

$$\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}=\begin{cases}p(p-1)x_i^{p-2} & (i=j),\\ 0 & (i\neq j),\end{cases}$$

故当 $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$时，

$$d^2F=p(p-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{n}\right)^{p-2}dx_i^2>0\quad\left(\sum_{i=1}^{n}dx_i^2\neq0\right),$$

它不受约束条件的限制，故函数 u 取得极小值 $u=\frac{a^p}{n^{p-1}}$.

这里应该指出的是，对于一般的实数 p，应限定 $x_i>0$.

【3669】 $u=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x_n}$，若 $\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n=1$ $(\alpha_i>0,\beta_i>0;\ i=1,2,\cdots,n)$*.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x_n}+\lambda(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=-\dfrac{\alpha_i}{x_i^2}+\lambda\beta_i=0\ (i=1,2,\cdots,n),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_ix_i=1\end{cases}$$

得

$$x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

由于

$$d^2F=2\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i^3}dx_i^2>0\quad\left(\sum_{i=1}^{n}dx_i^2\neq0\right),$$

故当 $x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}$ 时，函数 u 取得极小值 $u=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^2$.

【3670】 $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$，若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ $(a>0,\alpha_i>1,\ i=1,2,\cdots,n)$**.

解 设 $w=\ln u=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\ln x_i$，$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=w-\frac{1}{\lambda}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\ln x_i-\frac{x_i}{\lambda}\right)+\frac{a}{\lambda}$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\alpha_i}{x_i}-\dfrac{1}{\lambda}=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a\end{cases}$$

---

* 作者注：本题应加条件 $x_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

** 作者注：本题应加条件 $x_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

得 $$x_i=\frac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $$\mathrm{d}^2w=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i}\mathrm{d}x_i^2<0\quad (\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i^2\neq 0)$$

不论 $\mathrm{d}x_i$ 之间有什么约束条件恒成立，故函数 w 当 $x_i=\frac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$时取得极大值，即函数 u 当$x_i=\frac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$时取得极大值 $u=\left(\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_n^{\alpha_n}$.

【3671】 若 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$，求二次型 $u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$的极值.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1}=(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, & (1)\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2}=a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, & (2)\\ \qquad\vdots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_n}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0, & (n)\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1. & (n+1)\end{cases}$$

前 n 个方程要有非零解，必须矩阵(a_{ij})的特征方程$|A-\lambda E|=0$ 有解，其中 A 为以 a_{ij} 为元素的实对称矩阵，E 为单位矩阵. 由线性代数中关于欧氏空间的理论知，此特征方程必有 n 个实根，即有 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 满足$|A-\lambda E|=0$. 对于任一根 λ_k，代入方程(1)～(n)，可求得$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的一个解空间，解空间的维数，等于 λ_k 的重数. 解空间中的单位元素即方程组(1)～$(n+1)$的根. 当 λ_k 是单重根时，解空间是一维的，单位元素只有两个. 当 λ_k 是多重根时，对应 λ_k 的单位元素就有无穷多个了.

对于 λ_k 的解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，显然满足方程组(1)～$(n+1)$. 因此，有 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda_kx_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，从而得

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_kx_i^2=\lambda_k\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\lambda_k.$$

由于函数 u 在 n 维球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 上连续，故必取得最大值和最小值. 于是，对应于 λ_1 和 λ_n 的解，分别使函数 u 取得最大值 λ_1 和最小值 λ_n，因而也是 u 的极大值和极小值，或是 u 的弱极大值和弱极小值，视 λ_1 和 λ_n 的重数而定(多重时为弱极值). 由线性代数中把 d^2F 化标准型的方法，可证：对于不等于 λ_1 和 λ_n 的 λ_k，二次型不取得极值.

【3672】 若 $n\geqslant 1$ 及 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，证明不等式：

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

提示 在 $x+y=a\,(a>0)$的条件下，求函数 $z=\frac{x^n+y^n}{2}\,(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$的最小值.

证 考虑函数 $z=\frac{x^n+y^n}{2}$在条件 $x+y=a\,(a>0,x\geqslant 0,y\geqslant 0)$下的极值问题. 设 $F(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)+\lambda(x+y-a)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{n}{2}x^{n-1}+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{n}{2}y^{n-1}+\lambda=0,\\ x+y=a\end{cases}$$

可得 $x=y=\frac{a}{2}$.

将点$(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$与边界点$(0,a)$、$(a,0)$的函数值进行比较(注意到$n\geqslant1$)：

$$z(0,a)=z(a,0)=\frac{a^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n=z\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)\ (n>1),$$

即知函数z当$x+y=a$时的最小值为$\left(\frac{a}{2}\right)^n$. 从而有

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n\quad(\text{当}\ x+y=a,x\geqslant0,y\geqslant0\ \text{时}).\tag{1}$$

下面我们证明

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\quad(\text{当}\ x\geqslant0,y\geqslant0\ \text{时}).\tag{2}$$

当$x=y=0$时,不等式(2)取等号,显然成立;当$x\geqslant0,y\geqslant0$且x,y不同时为零时,令$x+y=a$,则$a>0$. 于是,由不等式(1)即得

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

由此可知,不等式(2)成立. 证毕.

【3673】 证明:赫尔德不等式:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\quad\left(a_i\geqslant0,x_i\geqslant0;\ i=1,2,\cdots,n;\ k>1,\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right).$$

提示 在$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i=A\ (A>0)$的条件下,求函数$u=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k\right)^{\frac{1}{k'}}$的最小值.

证 我们首先证明函数 $u=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$

在条件$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i=A\ (A>0)$下的最小值是$A$. 为此,对$n$用数学归纳法.

当$n=1$时,显然有 $(a_1^k)^{\frac{1}{k}}(x_1^{k'})^{\frac{1}{k'}}=a_1x_1=A$.

设当$n=m$时,命题成立. 故对任意m个数$a_1,a_2,\cdots,a_m(a_i\geqslant0)$,当$\sum\limits_{i=1}^{m}a_ix_i=A(x_1\geqslant0,\cdots,x_m\geqslant0)$时,必有

$$A\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}.$$

我们证明当$n=m+1$时命题也成立. 设$\sum\limits_{i=1}^{m+1}a_ix_i=A,u=\alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum\limits_{i=1}^{m+1}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$,其中$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m+1}a_i^k$,求$u$的最小值. 令$F(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})=u(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})-\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{m+1}a_ix_i-A\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\alpha^{\frac{1}{k}}}{k'}\left(\sum\limits_{i=1}^{m+1}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}-1}(k'x_i^{k'-1})-\lambda a_i=0\\ \sum\limits_{i=1}^{m+1}a_ix_i=A\qquad(i=1,2,\cdots,m+1),\end{cases}$$

可得
$$\frac{x_i^{k'-1}}{a_i}=\frac{\lambda}{\alpha^{\frac{1}{k}}}\left(\sum_{i=1}^{m+1}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k}}=\mu^{k'-1}\quad(i=1,2,\cdots,m+1).$$

(这里引入了记号μ),即$x_i=(a_i\mu^{k'-1})^{\frac{1}{k'-1}}=a_i^{\frac{1}{k'-1}}\mu=\mu a_i^{k-1}$,从而有

$$\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_i\,a_i^{k-1}=\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k=\mu\alpha=A,\qquad\mu=\frac{A}{\alpha}.$$

于是,解得满足极值必要条件的唯一解

$$x_i^0=\frac{A}{\alpha}a_i^{k-1}\quad(i=1,2,\cdots,m+1).$$

对应的函数值为

$$u_0=u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{m+1}^0)=\alpha^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{A}{\alpha}a_i^{k-1}\right)^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}}=\alpha^{\frac{1}{k}}\frac{A}{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m+1}a_i^{(k-1)k'}\right]^{\frac{1}{k'}}=\alpha^{\frac{1}{k}-1}A\left(\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k\right)^{\frac{1}{k'}}$$
$$=A\alpha^{\frac{1}{k}-1}\alpha^{\frac{1}{k'}}=A.$$

所研究的区域 $\sum_{i=1}^{m+1}a_i x_i=A$，$x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m+1)$是 $m+1$ 维空间中一个 m 维平面在第一卦限的部分，其边界由 $m+1$ 个 $m-1$ 维平面(之一部分)所组成：$x_i=0$，$\sum_{j=1}^{m+1}a_j x_j=A$ ($a_j\geqslant 0,x_j\geqslant 0$；$i=1,2,\cdots,m+1$) 在这些边界面上，求

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})=u(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_{m+1})=\alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}x_j^{k'}+\sum_{j=i+1}^{m+1}x_j^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

的最小值变为求 m 个变量的最小值. 以估计 $x_{m+1}=0$，$\sum_{i=1}^{m}a_ix_i=A$ 的最小值为例. 根据数学归纳法假设，注意到 $\alpha=\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_i^k$，即有

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_m,0)=\alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_ix_i=A.$$

因此，u 在边界面上的最小值不小于 A. 由此可知，u 在区域上的最小值为 $u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{m+1}^0)=A$，故命题当 $n=m+1$ 时成立. 于是，由数学归纳法可知，

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant A,\tag{1}$$

当 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=A$，$x_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$时.

下面我们证明赫尔德不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\quad(a_i\geqslant 0,x_i\geqslant 0)\tag{2}$$

成立. 事实上，若 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0$，则(2)式显然成立；若 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i>0$，令 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=A$，则 $A>0$. 于是，根据不等式(1)知

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant A=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i,$$

故不等式(2)成立. 证毕.

注 赫尔德(Holder)不等式是一个重要而常用的不等式，而且还可推广到一般的形式，证明方法也很多. 例如，可参看 G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya 合著的名著"Inequalities"(Second Edition, 1952), Chapter Ⅱ, 2.7～2.8.

【3674】 对于 n 阶行列式 $A=|a_{ij}|$，证明：阿达马不等式

$$A^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right).$$

提示 在关系式 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=S_i$ $(i=12,\cdots n)$ 存在的条件下，研究行列式 $A=|a_{ij}|$ 的极值.

证 证法 1：

为区别起见，以下用 A 表矩阵(a_{ij})，$|A|$表行列式$|a_{ij}|$. 考虑函数 $u=|A|=|a_{ij}|$ 在条件 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=S_i(i=1,2,\cdots,n)$下的极值问题. 其中 $S_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

由于上述 n 个条件限制下的 n^2 元点集是有界闭集，故连续函数 u 必在其上取得最大值和最小值. 下面

我们求函数 u 满足条件极值的必要条件. 设

$$F=u-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2-S_i\right).$$

由于函数 u 是多项式. 当按第 i 行展开时,有

$$u=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}=A_{ij}-2\lambda_i a_{ij}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

得 $a_{ij}=\dfrac{A_{ij}}{2\lambda_i}$. 当 $i\neq k$ 时,有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{kj}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}a_{kj}}{2\lambda_i}=\frac{1}{2\lambda_i}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}a_{kj}=0,$$

故当函数 u 满足极值的必要条件时,行列式不同的两行所对应的向量必直交. 若以 A' 表示 A 的转置矩阵,则由行列式的乘法得

$$u^2=|A'|\cdot|A|=\begin{vmatrix}S_1&0&\cdots&0\\0&S_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&S_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}S_i.$$

因此,函数 u 满足极值的必要条件时,必有 $u=\pm\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{n}S_i}$.

显然由于函数 u 在条件 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$下不恒为常数,故

$$u_{\max}=\sqrt{\prod_{i=1}^{n}S_i},\quad u_{\min}=-\sqrt{\prod_{i=1}^{n}S_i}.$$

从而,
$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}S_i,\quad 当\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=S_i\ (i=1,2,\cdots,n)时. \tag{1}$$

下面我们证明
$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right). \tag{2}$$

若至少有一个 i,使 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=0$,则 $a_{ij}=0\ (j=1,2,\cdots,n)$. 从而,$|A|=0$. 于是,不等式(2)显然成立.

若对一切 $i\ (i=1,2,\cdots,n)$,都有 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\neq0$. 令 $S_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2$,则 $S_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 于是,根据不等式(1)即得

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}S_i=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right),$$

故不等式(2)成立. 证毕.

证法 2:

如将原题归一化,则也可获证. 设

$$\bar{a}_{ij}=\frac{a_{ij}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

则有
$$\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}^2=1\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

从而,原命题就可转化为证明不等式$|A|\leqslant1$,其中

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=1\ (i=1,2,\cdots,n),\quad A=(a_{ij}),\quad |A|=|a_{ij}|.$$

设 $F=|A|+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2-1\right)$. 解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}=A_{ij}+2\lambda_i a_{ij}=0,$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式($i,j=1,2,\cdots,n$). 于上式两端乘以 a_{ij}，并对 $j=1,2,\cdots,n$ 求和，即得 $|A|+2\lambda_i=0$ ($i=1,2,\cdots,n$). 从而有 $\lambda_i=-\frac{|A|}{2}$ ($i=1,2,\cdots,n$)，也即 $A_{ij}=a_{ij}|A|$ ($i,j=1,2,\cdots,n$)，故得

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}|A| & \cdots & a_{1n}|A| \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}|A| & \cdots & a_{nn}|A| \end{vmatrix},$$

上式左端的行列式叫做 $|A|$ 的附属行列式，记为 $|A^*|$. 由线性代数知识可知，当 $|A|=0$ 时，$|A^*|=0$. 当 $|A|\neq0$时，

$$|A|\cdot|A^*|=\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix}=|A|^n,$$

故有 $|A^*|=|A|^{n-1}$. 于是，$|A|^{n-1}=|A|^{n+1}$.

由于 $|A|$ 的极值必须满足上式，故不难推知 $|A|_{\max}=1$，$|A|_{\min}=-1$. 从而得知：当 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=1$ ($i=1,2,\cdots,n$)时，恒有

$$|A|^2\leqslant1 \quad 或 \quad |A|\leqslant1.$$

求下列函数在指定区域内的上确界(sup)和下确界(inf)：

【3675】 $z=x-2y-3$，若 $0\leqslant x\leqslant1$，$0\leqslant y\leqslant1$，$0\leqslant x+y\leqslant1$.

解 以 D 表区域 $0\leqslant x\leqslant1$，$0\leqslant y\leqslant1$，$0\leqslant x+y\leqslant1$，它是一个有界闭区域(为一闭三角形)，故连续函数 z 在其上必有最大值和最小值. 由于 z 是 x,y 的线性函数，故不存在临界点，因此，最大值与最小值都在 D 的边界上达到.

D 的边界为三条直线段：

$$y=0\ (0\leqslant x\leqslant1),\quad x=0\ (0\leqslant y\leqslant1),\quad x+y=1\ (0\leqslant x\leqslant1);$$

在其上 z 分别变成一元函数：

$$z=x-3\ (0\leqslant x\leqslant1),\quad z=-2y-3\ (0\leqslant y\leqslant1),\quad z=3x-5\ (0\leqslant x\leqslant1).$$

由于这些函数都是一元线性函数，故也无临界点，其最大值与最小值必在此三线段的端点(即点(0,0)，点(1,0)，点(0,1))达到. 由此可知，z 在 D 上的最大值与最小值必在此三点(0,0)，(1,0)，(0,1)中达到.

由于 $z(0,0)=-3$，$z(1,0)=-2$，$z(0,1)=-5$，故

$$\sup z=-2 \qquad \inf z=-5.$$

【3676】 $z=x^2+y^2-12x+16y$，若 $x^2+y^2\leqslant25$.

解 考虑函数 z 在区域 $x^2+y^2<25$ 内的临界点：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-12=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+16=0. \end{cases}$$

在区域内无解，故连续函数 z 的最大值与最小值必在边界 $x^2+y^2=25$ 上达到.

考虑函数 z 在边界 $x^2+y^2=25$ 上的条件极值. 设 $F(x,y)=z-\lambda(x^2+y^2-25)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x-12-2\lambda x=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+16-2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

可得临界点 $P_1(3,-4)$及 $P_2(-3,4)$. 由于 $z(3,-4)=-75, z(-3,4)=125$,故得

$$\sup z=125, \quad \inf z=-75.$$

【3677】 $z=x^2-xy+y^2$,若 $|x|+|y|\leqslant 1$.

解题思路 先求函数 z 在区域 $|x|+|y|<1$ 内的临界点 P_0,再求函数 z 在下列四条边界线:

$$x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y=1; \quad x\geqslant 0, y\leqslant 0, x-y=1;$$
$$x\leqslant 0, y\geqslant 0, x-y=-1; \quad x\leqslant 0, y\leqslant 0, x+y=-1$$

上的临界点 P_1, P_2, P_3 及 P_4. 将这些点与上述四条边界线的端点 P_5, P_6, P_7 及 P_8 处的函数值求出. 比较 $z(P_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,8)$即获解.

解 先求函数 z 在区域 $|x|+|y|<1$ 内的临界点:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y-x=0,\end{cases}$$

解得临界点 $P_0(0,0)$. 相应地, $z(P_0)=0$.

再在边界: $x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y=1$ 上求临界点. 设 $F_1=x^2-xy+y^2-\lambda(x+y-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}=2x-y-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}=2y-x-\lambda=0,\\ x+y=1\end{cases}$$

得临界点 $P_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. 相应地, $z(P_1)=\dfrac{1}{4}$.

同法可在另外三条边界线: $x\geqslant 0, y\leqslant 0, x-y=1$ 上; $x\leqslant 0, y\geqslant 0, x-y=-1$ 上; $x\leqslant 0, y\leqslant 0, x+y=-1$ 分别求得临界点 $P_2\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $P_3\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$及 $P_4\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$. 相应地,

$$z(P_2)=z(P_3)=\frac{3}{4}, \quad z(P_4)=\frac{1}{4}.$$

最后,在上述四条边界线的端点 $P_5(1,0)$, $P_6(0,1)$, $P_7(-1,0)$及 $P_8(0,-1)$上求得函数值:

$$z(P_5)=z(P_6)=z(P_7)=z(P_8)=1.$$

比较 $z(P_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,8)$,即得 $\quad \sup z=1, \quad \inf z=0.$

【3678】 $u=x^2+2y^2+3z^2$,若 $x^2+y^2+z^2\leqslant 100$.

解 容易求得函数 u 在区域 $x^2+y^2+z^2<100$ 内的临界点为 $P_0(0,0,0)$,而在边界 $x^2+y^2+z^2=100$ 上的临界点为$P_1(10,0,0)$, $P_2(-10,0,0)$, $P_3(0,10,0)$, $P_4(0,-10,0)$, $P_5(0,0,10)$及 $P_6(0,0,-10)$. 相应地 $u(P_0)=0$, $u(P_1)=u(P_2)=100$, $u(P_3)=u(P_4)=200$, $u(P_5)=u(P_6)=300$. 于是,

$$\sup u=300, \quad \inf u=0.$$

【3679】 $u=x+y+z$,若 $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$.

解 所讨论的立体区域由曲面 $x^2+y^2=z$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$和平面 $z=1$, $x^2+y^2\leqslant 1$ 所围成,两个曲面的交线为 $x^2+y^2=z=1$.

显见在立体区域内部无临界点. 在边界面 $z=1$, $x^2+y^2\leqslant 1$ 的内部, $u(x,y,1)=x+y+1$ 也无临界点. 在边界面 $x^2+y^2=z$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$上,有 $u=x+y+x^2+y^2$ $(x^2+y^2\leqslant 1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=1+2x=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=1+2y=0\end{cases}$$

得临界点 $P_1\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. 相应地, $u(P_1)=-\dfrac{1}{2}$.

在边界线 $x^2+y^2=z=1$ 上,设 $F(x,y)=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=1+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

得临界点 $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ 及 $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$. 相应地,$u(P_2)=1+\sqrt{2}$, $u(P_3)=1-\sqrt{2}$. 于是,

$$\sup u=1+\sqrt{2},\qquad \inf u=-\frac{1}{2}.$$

【3680】 求函数 $u=(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$ 在区域 $x>0,y>0,z>0$ 内的下确界(inf)与上确界(sup).

解 函数 u 在区域 $x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$ 上是连续函数,因此,把区域扩大包括边界时,上、下确界不变,下面就扩大后的区域加以讨论.

显然当 $x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$ 时 $u\geqslant0$,且 $u(0,0,0)=0$,故 $\inf u=0$.

在区域内部,由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-(x+2y+3z)}[1-(x+y+z)],\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{-(x+2y+3z)}[1-2(x+y+z)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{-(x+2y+3z)}[1-3(x+y+z)],$$

而 $e^{-(x+2y+3z)}\neq0$,故函数 u 在域内无临界点.

又因

$$u=(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}=(x+y+z)e^{-(x+y+z)}e^{-(y+2z)}\leqslant(x+y+z)e^{-(x+y+z)}\to0\ [(x+y+z)\to+\infty],$$

故函数 u 的最大值必在有限的边界上达到. 考虑界面:

$$x=0;\quad u(0,y,z)=(y+z)e^{-(2y+3z)},\quad y\geqslant0,\ z\geqslant0.$$
$$y=0;\quad u(x,0,z)=(x+z)e^{-(x+3z)},\quad x\geqslant0,\ z\geqslant0.$$
$$z=0;\quad u(x,y,0)=(x+y)e^{-(x+2y)},\quad x\geqslant0,\ y\geqslant0.$$

同样可证明,这些界面上无临界点.

最后考虑边界线:$x=0,y=0,z\geqslant0$, $u(0,0,z)=ze^{-3z}$ 可解得临界点 $P_1(0,0,\frac{1}{3})$. 相应地,$u(P_1)=\frac{1}{3}e^{-1}$. 同法在边界线:$x=0,z=0,y\geqslant0$ 上可解得临界点 $P_2(0,\frac{1}{2},0)$; 在边界线:$y=0,z=0,x\geqslant0$ 上可解得临界点 $P_3(1,0,0)$. 相应地,$u(P_2)=\frac{1}{2}e^{-1}$,$u(P_3)=e^{-1}$. 至于边界线的一端为原点,另一端伸向无穷远,均已讨论过. 于是,

$$\sup u=e^{-1}\approx0.37.$$

【3681】 证明:函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值.

证 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^y(\cos x-1-y)=0\end{cases}$$

得 $x=k\pi,y=(-1)^k-1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^y(\cos x-2-y),$$

故在点$(2m\pi,0)$ $(m=0,\pm1,\cdots)$,$A=-2,B=0,C=-1$ 及 $AC-B^2=2>0$,此时函数 z 取得极大值;而在点$((2m+1)\pi,-2)$ $(m=0,\pm1,\cdots)$,$A=1+e^{-2},B=0,C=-e^{-2}$ 及 $AC-B^2=-e^{-2}-e^{-4}<0$,此时函数 z 无极值.

【3682】 函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 有极小值的充分条件是否为此函数在通过点 M_0 的每一条直线上有极小值呢? 研究例子 $f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$.

解 不是.研究函数

$$f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2).$$

对于每一条通过原点的直线:$y=kx$ $(-\infty<x<+\infty)$均有

$$f(x,kx)=(x-k^2x^2)(2x-k^2x^2)=x^2(1-k^2x)(2-k^2x),$$

当 $0<|x|<\frac{1}{k^2}$ 时,$f(x,kx)>0$.但是 $f(0,0)=0$,因此,函数$f(x,y)$在直线 $y=kx$ 上在原点取得极小值零.

对于通过原点的另一条直线:$x=0$,有 $f(0,y)=y^4$,故在原点也取得极小值零.

因此,函数 $f(x,y)$在一切通过原点的直线上均有极小值.但是,

$$f(a,\sqrt{1.5a})=-0.25a^2<0 \quad (a>0),$$

因此,函数 $f(x,y)$在$(0,0)$点不取得极小值.

此例说明:尽管 $f(x,y)$在通过点 M_0 的每一条直线上在 M_0 均有极小值,但却不能保证 $f(x,y)$作为二元函数在点 M_0 一定有极小值.

【3683】 分解已知正数 a 为 n 个正的因数,使得它们的倒数的和为最小.

提示 由题意,我们应求函数 $u=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ 在条件 $a=\prod_{i=1}^{n}x_i$ 或 $\ln a=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ $(a>0,x_i>0)$下的极值.

解 按题设,我们应求函数 $u=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ 在条件 $a=\prod_{i=1}^{n}x_i$ 或 $\ln a=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ $(a>0,x_i>0)$下的极值.

设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln a)$.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=-\dfrac{1}{x_i^2}+\dfrac{\lambda}{x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ a=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\end{cases}$$

可得 $x_i=\frac{1}{\lambda}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.从而解得

$$x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=a^{\frac{1}{n}}, \quad u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=na^{-\frac{1}{n}}.$$

当点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$趋于边界时,至少有一个 $x_i\to 0$,即$\frac{1}{x_i}\to+\infty$,而 $u>\frac{1}{x_i}$,故 $u\to+\infty$.因此,函数 u 必在区域内部取得最小值.于是,将正数 a 分为 n 个相等的正的因数 $a^{\frac{1}{n}}$ 时,其倒数和 $na^{-\frac{1}{n}}$ 最小.

【3684】 分解已知正数 a 为 n 个相加数,使得它们的平方和为最小.

提示 由题意,我们应求函数 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 在条件 $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$ $(a>0)$下的极值.

解 考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 在条件 $a=\sum_{i=1}^{n}x_i$ $(a>0)$下的极值.

设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i-a)$.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\lambda=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ \prod\limits_{i=1}^{n}x_i=a\end{cases}$$

得

$$x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=\frac{a}{n}, \quad u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=\frac{a^2}{n}.$$

当 n 个相加数中有若干个相加数$\to\pm\infty$时,平方和$\to+\infty$.因此,函数 u 必在有限区域内取得最小值.于是,将正数 a 分解为 n 个相等的相加数$\frac{a}{n}$时,其平方和$\frac{a^2}{n}$最小.

【3685】 分解已知正数 a 为 n 个正的因数,使得它们的已知正数次幂的和为最小.

提示 由题意,我们应求函数 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i^{a_i}$ $(a_i>0)$在条件 $\ln a=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ $(a>0,x_i>0)$下的极值.

解 考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ $(a_i>0)$在条件 $\ln a=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ $(a>0,x_i>0)$下的极值.

设 $F=u-\lambda(\sum_{j=1}^{n}\ln x_i-\ln a)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\alpha_i x_i^{\alpha_i-1}-\dfrac{\lambda}{x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), & (1)\\ \sum_{i=1}^{n}\ln x_i=\ln a. & (2)\end{cases}$$

由(1)得 $x_i=\left(\dfrac{\lambda}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}$. 代入(2),得 $\quad \ln a+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\ln\alpha_i}{\alpha_i}=\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\alpha_i}$.

令 $\beta=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\alpha_i}$,则有

$$\lambda=a^{\frac{1}{\beta}}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\beta\alpha_i}}=\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\beta}},\qquad x_i^0=\frac{\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}}}{(\alpha)^{\frac{1}{\alpha_i}}}\qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

$$u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\alpha_i}=\beta\lambda=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}\right)\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}}.$$

显然,函数 u 在区域内部达到最小值,于是,所求得的 u 即为最小值.

【3686】 已知在平面上的 n 个质点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),\cdots,P_n(x_n,y_n)$,其质量分别为 $m_1,m_2,\cdots m_n$. $P(x,y)$点位于何处时,该质点系对此点的转动惯量为最小?

解 设 $f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}m_i[(x-x_i)^2-(y-y_i)^2]$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2\sum_{i=1}^{n}m_i(x-x_i)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2\sum_{i=1}^{n}m_i(y-y_i)=0\end{cases}$$

得 $$x_0=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i x_i,\qquad y_0=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i y_i,$$

其中 $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$.

当 $x\to\infty$ 或 $y\to\infty$ 时,显然 $f\to+\infty$. 因此,点 $P(x_0,y_0)$即为所求.

【3687】 已知容积为 V 的无盖长方浴盆,当其尺寸怎样时,有最小的表面积?

提示 设浴盆的长、宽、高分别为 x、y、h,由题意,我们应求函数 $S=2(x+y)h+xy$ 在条件 $V=xyh$ $(x>0,y>0,h>0)$下的极值.

解 设浴盆长、宽、高分别为 x、y、h,则考虑函数 $S=2(x+y)h+xy$ 在条件 $V=xyh$ $(x>0,y>0,h>0)$下的极值.

设 $F(x,y,h)=S-\lambda(xyh-V)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2h-\lambda yh=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+2h-\lambda xh=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial h}=2(x+y)-\lambda xy=0, & (3)\\ xyh=V.\end{cases}$$

(1),(2),(3)可改写为 $$\frac{1}{h}+\frac{2}{y}=\lambda=\frac{1}{h}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y},$$

故有 $$x_0=y_0=2h_0=\sqrt[3]{2V},\quad h_0=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}=\sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

从实际问题的常识可以断定，一定在某一处达到最小. 因此，当长宽均为 $\sqrt[3]{2V}$，高为$\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$时，浴盆的表面积最小，且最小表面积为 $S=3\sqrt[3]{4V^2}$.

从数学上来考虑，应讨论 x,u,h 趋于边界的情况. 当 x,y,h 中有任一个趋于零，例如，$h\to+0$，则由 $V=xyh$ 即可断定 $xy\to+\infty$. 但是，$S>xy$，故 $S\to+\infty$. 当 x,y,h 中有任一个趋于$+\infty$时，一定引起至少有另一个趋于零. 重复上面的讨论可知，$S\to+\infty$. 因此，连续函数 S 必在区域内部取得最小值.

【3688】 横截面为半圆形的无盖柱形浴盆，其表面积等于 S，在何种尺寸下此盆有最大的容积？

解 设圆柱半径为 r，高为 h，则考虑函数 $V=\frac{1}{2}\pi r^2h$ 在条件 $S=\pi(r^2+rh)$ $(r>0,h>0)$下的极值.

为简单起见，忽略系数$\frac{1}{2}\pi$. 设 $F=r^2h-\lambda(r^2+rh-\frac{S}{\pi})$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial r}=2rh-\lambda(2r+h)=0,\\ \frac{\partial F}{\partial h}=r^2-\lambda r=0,\\ r^2+rh=\frac{S}{\pi}\end{cases}$$

得 $$r_0=\sqrt{\frac{S}{3\pi}},\qquad h_0=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}},$$

从而有 $V_0=\frac{1}{2}\pi r_0^2h_0=\sqrt{\frac{S^3}{27\pi}}$.

由实际情况知，V 一定达到最大体积. 因此，当 $h_0=2r_0=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$时，体积 $V_0=\sqrt{\frac{S^3}{27\pi}}$最大.

从数学角度看，由 $r^2+rh=\frac{S}{\pi}$知 r^2 和 rh 恒有界. 当 $r\to+0$或 $h\to+0$ 时必有 $V\to0$. 当 $h\to+\infty$时，由 rh 有界可推出$r\to+0$. 因而 $V\to0$(显然不可能 $r\to+\infty$). 于是，体积 V 必在区域内部达到最大值.

【3689】 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点，这点到 n 个已知点 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,\cdots,n)$距离的平方和为最小.

解 考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]$在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值.

设 $F(x,y,z)=u-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2\Big[\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)-\lambda x\Big]=2\Big[(n-\lambda)x-\sum_{i=1}^{n}x_i\Big]=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2\Big[(n-\lambda)y-\sum_{i=1}^{n}y_i\Big]=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2\Big[(n-\lambda)z-\sum_{i=1}^{n}z_i\Big]=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1, & (4)\end{cases}$$

由(1),(2),(3)得 $$x=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad y=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}z_i,$$

代入(4)，得 $$(n-\lambda)^2=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i\Big)^2+\Big(\sum_{i=1}^{n}z_i\Big)^2=N^2\quad(N>0).$$

于是，得 $$x'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad y'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i,$$

及 $$x''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad y''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i.$$

从而，

$$\begin{aligned}u(x',y',z')&=\sum_{i=1}^{n}[(x'-x_i)^2+(y'-y_i)^2+(z'-z_i)^2]\\&=n(x'^2+y'^2+z'^2)-2x'\sum_{i=1}^{n}x_i-2y'\sum_{i=1}^{n}y_i-2z'\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\\&=n-\frac{2}{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\\&=n-2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2).\end{aligned}$$

同法可求得 $$u(x'',y'',z'')=n+2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)>u(x',y',z').$$

由于函数 u 在闭球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上连续，故必取得最大值及最小值. 于是，当 $x=x'$，$y=y'$，$z=z'$ 时，u 最小(同时也证明了当 $x=x''$，$y=y''$，$z=z''$ 时，u 最大).

【3690】 底面相同的直圆柱体与直圆锥体拼接在一起构成一个物体，其总表面积 Q 取给定值. 为了使此物体的体积为最大，求其尺寸大小.

解 设圆柱部分的底半径为 R，高为 h；圆锥部分的母线与底面的夹角为 α，则有 $\pi R^2+2\pi Rh+\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}=Q$ (常数)($R>0,h>0,0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$). 考虑函数 $V(\alpha,h,R)=\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi R^3\tan\alpha$ 在上述条件下的极值.

设 $F(\alpha,h,R)=3R^2h+R^3\tan\alpha-\lambda\left(R^2+2Rh+\frac{R^2}{\cos\alpha}-\frac{Q}{\pi}\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial\alpha}=\frac{R^3}{\cos^2\alpha}-\frac{\lambda R^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial h}=3R^2-2R\lambda=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial R}=6Rh+3R^2\tan\alpha-\left(2R+2h+\frac{2R}{\cos\alpha}\right)\lambda=0, & (3)\\ R^2+2Rh+\frac{R^2}{\cos\alpha}=\frac{Q}{\pi}. & (4)\end{cases}$$

由(2)得 $\lambda=\frac{3}{2}R$. 代入(1)，得 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. 由于 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，故由 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. 代入(3)，得

$$6Rh+\frac{6}{\sqrt{5}}R^2=3R^2+3Rh+\frac{9}{\sqrt{5}}R^2,$$

即 $$Rh=R^2+\frac{R^2}{\sqrt{5}}\quad 或\quad h=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)R.$$

代入(4)，得 $$R^2+\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)R^2+\frac{3}{\sqrt{5}}R^2=\frac{Q}{\pi}.$$

于是，$R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. 相应地，有

$$\begin{aligned}V_0&=\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi R^3\tan\alpha=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^3\\&=\left(1+\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^2R=\frac{3+\sqrt{5}}{3}\pi\,\frac{3-\sqrt{5}}{4}\,\frac{Q}{\pi}\,\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.\end{aligned}$$

现在讨论边界情况. 由(4)知，R^2，Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 均为正的有界量.

(ⅰ) 当 $R\to+0$ 时，由 Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 有界可知

$$V=\pi(Rh)R+\frac{\pi}{3}\left(\frac{R^2}{\cos\alpha}\right)R\sin\alpha\to 0.$$

(ⅱ) 当 $h\to+0$(所研究的体退化为圆锥)时，需要求当圆锥全表面积 $\pi R^2+\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}=Q$(常数)时圆锥体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^3\tan\alpha$ 的最大值. 用 l 表圆锥的斜高，即

$$l=\frac{R}{\cos\alpha},\quad R\tan\alpha=\sqrt{\frac{R^2}{\cos^2\alpha}-R^2}=\sqrt{l^2-R^2}.$$

于是，$l=\frac{Q-\pi R^2}{\pi R}$，$V=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2-R^2}$，故 $V^2=\frac{1}{9}QR^2(Q-2\pi R^2)\quad\left(0<R<\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right)$.

由此易知 V^2(从而 V)当 $R^2=\frac{Q}{4\pi}$(即 $R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$)时达最大值，并且最大体积 $V_1=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}$. 不难验证 $V_1<V_0$.

(ⅲ) 当 $h\to+\infty$ 时，由 Rh 有界知 $R\to+0$. 由(ⅰ)知 $V\to 0$.

(ⅳ) 当 $\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$ 时，由 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 有界可知 $R\to+0$，由(ⅰ)知 $V\to 0$.

(ⅴ) 当 $\alpha\to+0$(所研究的体退化为圆柱)时，可以求得达到最大体积的尺寸为 $h=2R$ 及 $Q=\sqrt[3]{54\pi V_2^2}$(参看 1563 题)，即 $V_2=\sqrt{\frac{Q^3}{54\pi}}=\frac{\sqrt{6}}{18}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}$. 不难证明 $V_2<V_0$.

综上所述，我们得到当 $R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$，$\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$ 时，所研究的体积 V 达到最大值

$$V_0=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

【3691】 一长方体的上下两底均为正方形，分别与同样的两个正四角锥体拼接在一起构成一个物体，其体积 V 取给定值. 当四角锥的侧面对它们的底成怎样的倾角时，该物体的总表面积为最小?

解 设长方体两底(正方形)边长为 a，高为 h，棱锥侧面与底面的夹角为 α，则 $V=a^2h+\frac{1}{3}a^3\tan\alpha$. 考虑函数 $S=4ah+\frac{2a^2}{\cos\alpha}$ 在上述条件下的极值.

设 $F=S-\lambda(a^2h+\frac{1}{3}a^3\tan\alpha-V)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial a}=4h+\frac{4a}{\cos\alpha}-2\lambda ah-\lambda a^2\tan\alpha=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial h}=4a-\lambda a^2=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}=\frac{2a^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\lambda a^3}{3\cos^2\alpha}=0, & (3)\\ a^2h+\frac{1}{3}a^3\tan\alpha=V. & (4)\end{cases}$$

由(2)，(3)可得 $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$. 同 3690 题进一步可求出 a 和 h

类似 3687 题的讨论，当 $a\to+0$，$a\to+\infty$，$h\to+\infty$，$\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$ 等情况均能证明 $S\to+\infty$. 对于边界为 $\alpha=0$ 及 $h=0$ 这两种退化情况，类似 3690 题，可证明此时的总表面积比 $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$ 时的总表面积为大. 于是，当 $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$ 时，物体的总表面积最小.

【3692】 将周长为 $2p$ 的矩形绕其一边旋转，矩形所扫过的区域构成一旋转体，求使该旋转体体积为最大的那个矩形.

解 设矩形的边长为 x 及 y，则考虑函数 $V=\pi y^2 x$ 在条件 $x+y=p$ 下的极值.

设 $F=V-\lambda(x+y-p)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\pi y^2-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2\pi xy-\lambda=0,\\ x+y=p\end{cases}$$

得 $x=\dfrac{p}{3}$, $y=\dfrac{2p}{3}$.

由于在边界上，一边为零，一边为 p，推出 $V=0$. 于是，当矩形的两边分别为 $\dfrac{p}{3}$ 及 $\dfrac{2p}{3}$ 时，旋转体的体积最大.

【3693】 将周长为 $2p$ 的三角形绕其一边旋转，三角形所扫过的区域构成一旋转体，求使该旋转体体积为最大的那个三角形.

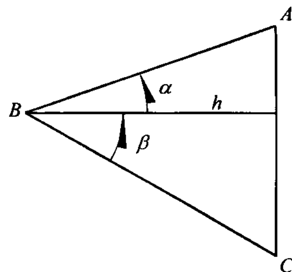


图 6.43

解 如图 6.43 所示，以 AC 为轴旋转，取参数：高 h 及二角 α、β. 考虑函数 $V=\dfrac{1}{3}\pi h^3(\tan\alpha+\tan\beta)$ 在条件 $\dfrac{h}{\cos\alpha}+\dfrac{h}{\cos\beta}+h(\tan\alpha+\tan\beta)=2p$ 下的极值.

为计算简单起见，略去常数 $\dfrac{1}{3}\pi$. 设 $F=h^3(\tan\alpha+\tan\beta)-\lambda\left(\dfrac{h}{\cos\alpha}+\dfrac{h}{\cos\beta}+h\tan\alpha+h\tan\beta-2p\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial h}=3h^2(\tan\alpha+\tan\beta)-\lambda\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\beta}+\tan\alpha+\tan\beta\right)=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}=\dfrac{h^3}{\cos^2\alpha}-\lambda h\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta}=\dfrac{h^3}{\cos^2\beta}-\lambda h\left(\dfrac{\sin\beta}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}\right)=0, & (3)\\ h\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\beta}+\tan\alpha+\tan\beta\right)=2p. & (4)\end{cases}$$

由(2)及(3)得 $\alpha=\beta$ 及 $\lambda=\dfrac{h^2}{1+\sin\alpha}=\dfrac{h^2}{1+\sin\beta}$. 代入(1)式，得 $\sin\alpha=\sin\beta=\dfrac{1}{3}$. 于是，$h\tan\alpha=\dfrac{h}{3\cos\alpha}$，代入(4)式，即得 $\dfrac{h}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{4}p$. 从而，得三边分别为 $AB=BC=\dfrac{3}{4}p$，$AC=2h\tan\alpha=\dfrac{p}{2}$.

讨论边界情况. 当 $h\to+0$ 或 $h\to p$ 时，显然有 $V\to 0$. 对于二角 α 及 β 必有大小限制：$0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$-\alpha\leqslant\beta\leqslant\alpha$（注意 α，β 的方向规定不同），当 $\alpha\to+0$ 或 $\alpha\to\dfrac{\pi}{2}-0$ 或 $\beta\to-\alpha$ 时，同样均有 $V\to 0$. 于是，当三角形的三边长分别为 $\dfrac{p}{2}$，$\dfrac{3p}{4}$ 及 $\dfrac{3p}{4}$，并绕长为 $\dfrac{p}{2}$ 的边旋转时，所得的体积最大.

【3694】 在半径为 R 的半球内作出具有最大体积的内接长方体.

解 不妨设此长方体的一个底面与半球所在的底面重合，另外四个顶点在半球球面上，且半球面在直角坐标系下的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$z\geqslant 0$. 又设长方体的长、宽、高分别为 $2x$、$2y$ 及 z（$x>0$，$y>0$，$z>0$）. 考虑函数 $V=4xyz$ 在上述条件下的极值. 设 $F=xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz-2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz-2\lambda y=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy-2\lambda z=0,\\ x^2+y^2+z^2=R^2\end{cases}$$

可得 $x=y=z=\frac{R}{\sqrt{3}}$.

由于在边界上(即 $x\to+0$ 或 $y\to+0$ 或 $z\to+0$ 时)显然$V\to0$,故当长方体的长、宽、高分别为$\frac{2R}{\sqrt{3}}$,$\frac{2R}{\sqrt{3}}$及$\frac{R}{\sqrt{3}}$时,其体积最大.

【3695】 在已知的直圆锥内作出具有最大体积的内接长方体.

解 不妨设直圆锥的底面半径为 R,高为 H,且长方体的一个面与直圆锥的底面重合,两个边长为 $2x$ 和 $2y$,四个顶点在直圆锥面上,高为 z. 过直圆锥的高和长方体底面的对角线作一截面,如图 6.44 所示,则

$$CD=H,EK=FG=z,AD=R,DE=\sqrt{x^2+y^2},(H-z)R=H\sqrt{x^2+y^2}(R、H\text{ 为常数}).$$

考虑函数 $V=4xyz$ 在上述条件下的极值($x>0,y>0,z>0$).

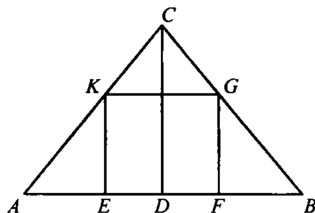


图 6.44

为计算简单计,略去常数 4. 设 $F=xyz-\lambda[H\sqrt{x^2+y^2}-(H-z)R]$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=yz-\frac{\lambda Hx}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=xz-\frac{\lambda Hy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z}=xy-\lambda R=0, & (3)\\ (H-z)R=H\sqrt{x^2+y^2}. & (4)\end{cases}$$

由(1)、(2)得 $x=y$,代入(3),得 $x=y=\sqrt{\lambda R}$. 又由(1)可得$z=\frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}}$. 将 x,y,z 代入(4)得 $H-\frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}}=\frac{H}{R}\sqrt{2\lambda R}$,解之得 $\lambda=\frac{2}{9}R$,从而有 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{3}R$, $z=\frac{1}{3}H$; $V=\frac{\sqrt{2}}{36}R^2H$

显然,在所论区域的边界上(即 $x\to+0$ 或 $y\to+0$ 或 $z\to+0$ 时),有 $V\to0$,故当长方体的高等于圆锥高的$\frac{1}{3}$时,其体积最大.

【3696】 在椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内作出具有最大体积的内接长方体.

解 此长方体的对称中心为原点. 设其一个顶点为(x,y,z),按题意,考虑函数 $V=8xyz$ 在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ($x>0,y>0,z>0$)下的极值. 为计算简单计,略去常数 8. 设 $F=xyz-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=yz-2\lambda\frac{x}{a^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=xz-2\lambda\frac{y}{b^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=xy-2\lambda\frac{z}{c^2}=0,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$$

得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$，这时 $V=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc>0$.

现在讨论边界情况. 当 $x\to a-0,y\to b-0,z\to c-0$ 中有任一个成立时，则另两个变量必皆趋于零；又若 x,y,z 中有一个趋于零时，则体积 V 趋于零. 总之，在边界上，恒有 $V\to 0$. 于是，具有最大体积的长方体的长、宽、高分别为$\frac{2a}{\sqrt{3}}$，$\frac{2b}{\sqrt{3}}$，$\frac{2c}{\sqrt{3}}$.

【3697】 直圆锥的母线 l 与底平面成倾角 α. 试在此直圆锥中作出具有最大全表面积的内接长方体.

解 设圆锥的底半径为 R，高为 H，则有 $R=l\cos\alpha$，$H=l\sin\alpha$，$\frac{H}{R}=\tan\alpha$. 内接长方体的放置方法与 3695 题相同. 设底面的两边分别为 $2d\cos\theta$ 和 $2d\sin\theta$，高为 h，则 $0<d<R$，$0<h<H$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 h,d 由条件 $\frac{H-h}{H}=\frac{d}{R}$ 约束，此条件可改写为

$$d\tan\alpha+h=H=l\sin\alpha.$$

所求的全表面积为 $S=4(d^2\sin2\theta+dh\sin\theta+dh\cos\theta)$.

（ⅰ）固定 d 和 h，考虑 $S=S(\theta)$ 的变化情况. 由一元函数极值求法，不难断定，仅有 $S'(\frac{\pi}{2})=0$. $S(\theta)$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 处达到最大值 $S=4(d^2+\sqrt{2}dh)$，即底面为正方形时，S 才取得最大值. 因此，原问题可化为在条件 $d\tan\alpha+h=l\sin\alpha$ $(d>0,h>0)$ 下，求函数 $S=4(d^2+\sqrt{2}dh)$ 的极值.

（ⅱ）此问题的边界值：当 $d\to+0$（此时 $h\to H-0$）时，显然 $S\to 0$；而当 $h\to+0$（这时 $d\to R-0$）时，$S\to 4R^2$. 在后一种情况下，全表面积退化为上、下两个正方形面积之和.

（ⅲ）在区域内部，设 $F=4(d^2+\sqrt{2}dh)-\lambda(d\tan\alpha+h-l\sin\alpha)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial d}=8d+4\sqrt{2}h-\lambda\tan\alpha=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial h}=4\sqrt{2}d-\lambda=0, & (2)\\ d\tan\alpha+h=l\sin\alpha. & (3)\end{cases}$$

由(2)得 $\lambda=4\sqrt{2}d$，代入(1)，得

$$h=(\tan\alpha-\sqrt{2})d. \tag{4}$$

由 $h>0$ 及 $d>0$ 知，当 $\tan\alpha\leqslant\sqrt{2}$ 时，方程组在所研究的区域内无解. 此时，S 的最大值必在边界上达到，即在 $h\to+0$ 时达到 $4R^2$. 当 $\tan\alpha>\sqrt{2}$ 时，将(4)式代入(3)式，可得

$$d=\frac{l\sin\alpha}{2\tan\alpha-\sqrt{2}},\qquad h=l\sin\alpha\frac{\tan\alpha-\sqrt{2}}{2\tan\alpha-\sqrt{2}}.$$

此时
$$S=4(d^2+\sqrt{2}dh)=\frac{2l^2\sin\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha-1}=\frac{2R^2\tan^2\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha-1}.$$

由于
$$(\tan\alpha-\sqrt{2})^2=\tan^2\alpha-2(\sqrt{2}\tan\alpha-1)>0,$$

故$\frac{\tan^2\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha-1}>2$. 从而，$S>4R^2$，即在该点的值大于边界上的值. 因此，它为最大值. 于是，当 $\tan\alpha>\sqrt{2}$，长方体底面为正方形，边长为 $2d\sin\frac{\pi}{4}=\frac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha-1}$，高 $h=l\sin\alpha\frac{\tan\alpha-\sqrt{2}}{2\tan\alpha-\sqrt{2}}$时，全表面积为最大.

【3698】 在椭圆抛物面$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$和 $z=c$ 所围区域内作出具有最大体积的内接长方体.

提示 设长方体的长、宽、高分别为 $2x$，$2y$ 及 $h=c-z$，由题意，我们应求函数 $V=4xy(c-z)$ 在条件$\frac{x^2}{a^2}$

$+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ $(x>0,y>0,\ 0<z<c)$ 下的极值.

解 设长方体的长、宽、高分别为 $2x$, $2y$ 及 $h=c-z$,则按题设考虑函数 $V=4xyh=4xy(c-z)$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ $(x>0,y>0,\ 0<z<c)$ 下的极值.

为计算简单起见,作 F 时略去常数 4. 设 $F=xy(c-z)-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c})$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=y(c-z)-2\lambda\frac{x}{a^2}=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=x(c-z)-2\lambda\frac{y}{b^2}=0. & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z}=-xy+\frac{\lambda}{c}=0, & (3)\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}. & (4)\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、$(c-z)$,比较即得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{c-z}{2c}.$$

代入(4)式,可得
$$x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{b}{2},\quad z=\frac{c}{2},\quad h=c-z=\frac{c}{2}.$$

由于边界上 V 趋于零,故长方体的最大值必在区域内达到. 于是,当长方体的尺寸分别为 a、b 及 $\frac{c}{2}$ 时,其体积最大.

【3699】 求点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 至平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上的点的最短距离.

提示 由题意,我们应求函数 $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 在条件 $Ax+By+Cz+D=0$ 下的极值.

解 按题设,我们求函数 $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 在条件 $Ax+By+Cz+D=0$ 下的极值.

设 $F(x,y,z)=r^2+\lambda(Ax+By+Cz+D)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2(x-x_0)+\lambda A=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2(y-y_0)+\lambda B=0. & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2(z-z_0)+\lambda C=0, & (3)\\ Ax+By+Cz+D=0. & (4)\end{cases}$$

由(1)、(2)、(3)可得
$$x=x_0-\frac{1}{2}\lambda A,\ y=y_0-\frac{1}{2}\lambda B,\ z=z_0-\frac{1}{2}\lambda C. \quad (5)$$

代入(4),得
$$\lambda=\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}, \quad (6)$$

将(5),(6)代入 $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 中,得

$$r=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

当 x,y,z 中有任一个趋于无穷时,r 趋于无穷. 因此,在区域内 r 必取最小值.

于是,点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 至平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上的点的最短距离为

$$r=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

【3700】 求空间二直线

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

之间的最短距离.

解 显然，当两直线不平行时，直线上一点趋于无穷远处时，与另一直线上各点的距离，都趋于无穷. 因此，不平行两直线的最短距离必在有限处达到.

为了书写简洁，我们采用向量的表达形式. 用

$$\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{l}_1 t+\boldsymbol{r}_{10}\ \text{表示直线}\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}_2(s)=\boldsymbol{l}_2 s+\boldsymbol{r}_{20}\ \text{表示直线}\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.\tag{2}$$

其中 t,s 为参数， $\boldsymbol{l}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$， $\boldsymbol{l}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$，

$\boldsymbol{r}_{10}=\{x_1,y_1,z_1\}$， $\boldsymbol{r}_{20}=\{x_2,y_2,z_2\}$.

又记 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}_{10}-\boldsymbol{r}_{20}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}$.

始端在直线(2)上，终端在直线(1)上的向量为：

$$\boldsymbol{u}(t,s)=(\boldsymbol{l}_1 t+\boldsymbol{r}_{10})-(\boldsymbol{l}_2 s+\boldsymbol{r}_{20})=\boldsymbol{l}_1 t-\boldsymbol{l}_2 s+\boldsymbol{r}_0.\tag{3}$$

本题即求 $|\boldsymbol{u}(t,s)|$ 的最小值，它必在有限的 t,s 上取得. 令

$$w=|\boldsymbol{u}(t,s)|^2=|\boldsymbol{l}_1 t-\boldsymbol{l}_2 s+\boldsymbol{r}_0|^2=l_1^2t^2+l_2^2s^2+r_0^2-2(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)st+2(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_0)t-2(\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_0)s,$$

其中 $l_1^2=\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_1$， $l_2^2=\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{l}_2$， $r_0^2=\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_0$.

w 取得极值的必要条件为

$$\frac{\partial w}{\partial t}=2[l_1^2t-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)s+(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_0)]=0,\quad \frac{\partial w}{\partial s}=2[l_2^2s-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)t-(\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_0)]=0.$$

由此可解得唯一的临界点 (t_0,s_0)：

$$t_0=-\frac{l_2^2(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_0)-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)(\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_0)}{l_1^2l_2^2-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)^2},\quad s_0=\frac{l_1^2(\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_0)-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_0)}{l_1^2l_2^2-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)^2}.$$

于是，$|\boldsymbol{u}(t_0,s_0)|$ 即为所求的最短距离. 下面计算 $|\boldsymbol{u}(t_0,s_0)|$. 令

$$\Delta=\sqrt{l_1^2l_2^2-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)^2},$$

显然有

$$\Delta^2=|\boldsymbol{l}_1|^2\cdot|\boldsymbol{l}_2|^2-[|\boldsymbol{l}_1|\cdot|\boldsymbol{l}_2|\cos(\widehat{\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2})]^2=|\boldsymbol{l}_1|^2\cdot|\boldsymbol{l}_2|^2\sin^2(\widehat{\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2})=|\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2|^2$$

即 $\Delta=|\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2|$. 将 t_0 及 s_0 代入(3)式，得

$$\boldsymbol{u}(t_0,s_0)=-\frac{1}{\Delta^2}(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_0)[l_2^2\boldsymbol{l}_1-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)\boldsymbol{l}_2]-\frac{1}{\Delta^2}(\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_0)[l_1^2\boldsymbol{l}_2-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)\boldsymbol{l}_1]+\boldsymbol{r}_0.$$

通过计算，不难看出

$$\boldsymbol{u}(t_0,s_0)\cdot\boldsymbol{l}_1=-\frac{1}{\Delta^2}(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_0)[l_2^2l_1^2-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)^2]-\frac{1}{\Delta^2}(\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_0)[l_1^2(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)l_1^2]+(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{l}_1)=0,$$

$$\boldsymbol{u}(t_0,s_0)\cdot\boldsymbol{l}_2=0.$$

因此，得知 $\boldsymbol{u}(t_0,s_0)\,/\!/\,\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2$.

令 $\boldsymbol{n}_0=\dfrac{\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2}{\Delta}$，则

$$|\boldsymbol{n}_0|=1,$$

$$|\boldsymbol{u}_0(t_0,s_0)|=|\boldsymbol{u}(t_0,s_0)\cdot\boldsymbol{n}_0|=\frac{|\boldsymbol{r}_0\cdot(\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2)|}{\Delta}=\pm\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix},$$

其中

$$\Delta=\sqrt{\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}p_1 & m_1\\ p_2 & m_2\end{vmatrix}^2},$$

且正负号的选取保证所得结果为正值.

【3701】 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

提示 设 (x_1,y_1) 为抛物线 $y=x^2$ 上任一点，(x_2,y_2) 为直线 $x-y-2=0$ 上任一点. 由题意，我们应求

函数 $r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ 在条件 $y_1-x_1^2=0$ 及 $x_2-y_2-1=0$ 下的极值.

解 设(x_1,y_1)为抛物线 $y=x^2$ 上任一点,(x_2,y_2)为直线 $x-y-2=0$ 上的任一点.按题意,我们应求函数

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

在条件 $y_1-x_1^2=0$ 及 $x_2-y_2-1=0$ 下的极值.显然,由几何知,当两点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)至少有一伸向无穷时,r 也必趋于无穷大,故 r 的最小值必在有限处达到.

设 $F(x_1,x_2,y_1,y_2)=r^2+\lambda_1(y_1-x_1^2)+\lambda_2(x_2-y_2-2)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=-2(x_2-x_1)-2\lambda_1x_1=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=2(x_2-x_1)+\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y_1}=-2(y_2-y_1)+\lambda_1=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y_2}=2(y_2-y_1)-\lambda_2=0,\\ y_1=x_1^2,\\ x_2-y_2-2=0\end{cases}$$

得唯一的一组解 $x_1=\dfrac{1}{2}$, $y_1=\dfrac{1}{4}$; $x_2=\dfrac{11}{8}$, $y_2=-\dfrac{5}{8}$.

于是,所求的最短距离为 $r_0=\sqrt{\left(\dfrac{11}{8}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{7}{8}\sqrt{2}$.

【3702】 求有心二次曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 的半轴.

提示 注意原点(0,0)即为曲线的中心.由题意,我们应求函数 $u=x^2+y^2$ 在条件 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 下的极值.

解 设(x_0,y_0)为二次曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 上的点,则$(-x_0,-y_0)$也为该曲线上点.因此,原点(0,0)即为曲线的中心.按题意,应求函数 $u=x^2+y^2$ 在条件 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 下的极值.

设 $F=x^2+y^2-\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=(\lambda A-1)x+\lambda By=0,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda Bx+(\lambda C-1)y=0,\\ Ax^2+2Bxy+Cy^2=1.\end{cases}$$

要上述方程组(前面的两个方程)有非零解,λ 必须满足二次方程

$$\begin{vmatrix}\lambda A-1 & \lambda B\\ \lambda B & \lambda C-1\end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

由题设知二次曲线为有心的,因此 $AC^2-B^2\neq0$.

由方程(1)可求得两根 λ_1 和 $\lambda_2(\lambda_1\geqslant\lambda_2)$. 将 λ 的值代入方程组,求得对应于 λ_1 的解(x_1,y_1)及对应于 λ_2 的解(x_2,y_2). 相应地,有

$$u(x_1,y_1)=x_1^2+y_1^2=x_1[\lambda_1(Ax_1+By_1)]+y_1[\lambda_1(Bx_1+Cy_1)]=\lambda_1(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2)=\lambda_1,$$

同理 $u(x_2,y_2)=x_2^2+y_2^2=\lambda_2$.

(i) 当 $AC-B^2>0$ 且 $A+C>0$(或 $A>0$)时,由(1)解得

$$\lambda_i=\frac{(A+C)\pm\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2(AC-B^2)}>0,$$

即有 $\lambda_1\geqslant\lambda_2>0$. 显然 u 的最大值及最小值必在区域内达到.因此,λ_1 及 λ_2 分别为 u 的最大值及最小值.此时,所对应的曲线为椭圆,长、短半轴的平方分别为 λ_1 及 λ_2. 当 $\lambda_1=\lambda_2(A=C,B=0)$时为圆.

当 $A+C<0$(或 $A<0$)时,两根 λ_i 均为负,相应曲线无轨迹.

（ⅱ）当 $AC-B^2<0$ 时，$\lambda_1>0,\lambda_2<0$. 此时只有一个极值 λ_1. 对应的曲线为双曲线. λ_1 为实半轴的平方（λ_2 表面上无意义，但实质上为虚半轴的平方），其中特别是 $B=0$ 时，曲线退化为一对相交直线.

【3703】 求有心二次曲面 $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1$ 的半轴.

解 同 3702 题可知，曲面的中心为(0,0,0). 按题意，达到曲面半轴的点(x,y,z)一定是函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1$ 下的临界点（但不一定是极值点. 例如，椭球面的中间轴所在的点）.

设 $F=u-\lambda(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=(\lambda A-1)x+\lambda Dy+\lambda Fz=0,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda Dx+(\lambda B-1)y+\lambda Ez=0,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}=\lambda Fx+\lambda Ey+(\lambda C-1)z=0,\\ Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1.\end{cases}$$

要上述方程组（前面的三个方程）有非零解，λ 必须满足三次方程

$$\begin{vmatrix}\lambda A-1 & \lambda D & \lambda F\\ \lambda D & \lambda B-1 & \lambda E\\ \lambda F & \lambda E & \lambda C-1\end{vmatrix}=0.$$

设三根为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3$. 对应于此三根可求出满足方程组的临界点. 与 3702 题相同，可证明在这些临界点处 $u(x,y,z)$的值恰为 $\lambda_i(i=1,2,3)$，即 λ_i 为曲面半轴的平方（严格地说，当 $\lambda_i<0$ 时不能认为它是半轴的平方）.

与二次曲线的情况类似，根据 λ_i 的正负可讨论曲面半轴的虚、实等问题，这对熟悉二次曲面分类的读者无实质性的困难，因此，省略掉这些烦琐的讨论.

【3704】 求用平面 $Ax+By+Cz=0$ 与柱体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 相交所成椭圆的面积.

解 我们只要确定所得椭圆的长短半轴 $\bar{a}$ 及 $\bar{b}$，即可按公式 $S=\pi\,\bar{a}\,\bar{b}$ 求得椭圆的面积.

注意到原点(0,0,0)在原椭圆柱面的中心轴上，且截平面 $Ax+By+Cz=0$ 又通过它. 因此，原点是截线椭圆的中心，从而长短半轴 $\bar{a}$ 及 $\bar{b}$ 的平方 $\bar{a}^2$ 及 $\bar{b}^2$，分别为函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $Ax+By+Cz=0$ 及 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 下的最大值和最小值. 设

$$F=u+2\lambda(Ax+By+Cz)-\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

于是，达到最大值、最小值的点的坐标必须满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\left(1-\dfrac{\mu}{a^2}\right)x+\lambda A=0, & (1)\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\left(1-\dfrac{\mu}{b^2}\right)y+\lambda B=0, & (2)\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}=z+\lambda C=0, & (3)\\ Ax+By+Cz=0, & (4)\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. & (5)\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、z 后，然后相加，得 $x^2+y^2+z^2=\mu$，即从方程组可解得 $u(x,y,z)=\mu$. 由(1)、(2)、(3)、(4)知，若要 x,y,z 及 λ 不全为零，μ 必须满足下列方程（同时 μ 只要满足下列方程，临界点(x,y,z)也一定有解）：

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{\mu}{a^2} & 0 & 0 & A \\ 0 & 1-\frac{\mu}{b^2} & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}=0$$

展开后，得 $$\frac{C^2}{a^2b^2}\mu^2-\left(\frac{B^2}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{C^2}{a^2}+\frac{C^2}{b^2}\right)\mu+(A^2+B^2+C^2)=0.$$

此方程有两正根．显然即为最大值及最小值 $\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$．由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2(A^2+B^2+C^2)}{C^2},$$

故椭圆面积 $\pi\bar{a}\,\bar{b}=\frac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}\quad(C\neq0)$.

当 $C=0$ 时，平面 $Ax+By=0$ 过 Oz 轴，显然得不到椭圆截面．

【3705】 求用平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$（其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$）

与椭球 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1$$

相交所成截面的面积．

解 截面为一椭圆．与 3704 题一样，我们只要先考虑函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+b\cos\gamma=0 \quad 及 \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

下的极值（$a>0,b>0,c>0$）．

设 $F=u+2\lambda_1(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)-\lambda_2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$．解方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}=\left(1-\frac{\lambda_2}{a^2}\right)x+\lambda_1\cos\alpha=0, & (1) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}=\left(1-\frac{\lambda_2}{b^2}\right)y+\lambda_1\cos\beta=0, & (2) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}=\left(1-\frac{\lambda_2}{c^2}\right)z+\lambda_1\cos\gamma=0, & (3) \\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0, & (4) \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. & (5) \end{cases}$$

将(1)，(2)，(3)三式分别乘以 x,y,z，然后相加，即得 $u=x^2+y^2+z^2=\lambda_2$．

由(1)、(2)、(3)、(4)知，若要 x、y、z 及 λ_1 不全为零，λ_2 必须满足下列方程

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda_2}{a^2} & 0 & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1-\frac{\lambda_2}{b^2} & 0 & \cos\beta \\ 0 & 0 & 1-\frac{\lambda_2}{c^2} & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}=0.$$

展开整理得

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\lambda_2^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2}+\frac{\cos^2\alpha^2}{c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)\lambda_2+1=0.$$

此方程有两正根，显然即为椭圆的长短半轴的平方 $\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$．由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}.$$

于是，所求椭圆的面积为 $S=\pi\bar{a}\bar{b}=\dfrac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}}$

【3706】 根据费马原理，光在最短时间内从一点传播到另一点.

假定点 A 和点 B 位于交界面为平面的不同的光介质中，并且光的传播速度在第一种介质中等于 v_1，而在第二种介质中等于 v_2，试推出光的折射定律.

解 如图 6.45 所示，光线从点 A 射出，沿着折线 AMB 到达点 B. 由 A、B 作垂直于 l 的直线 AC 及 BD，并与直线 l 交于点 C 及点 D. 设 $AC=a$，$BD=b$，$CD=d$. 选择角度 α，β 为变量，则

$$AM=\frac{a}{\cos\alpha},\quad BM=\frac{b}{\cos\beta},\quad CM=a\tan\alpha,\quad MD=b\tan\beta.$$

于是，我们的问题就是求函数

$$f(\alpha,\beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$$

在条件 $a\tan\alpha+b\tan\beta=d$ 下的最小值，其中 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$，(当 M 在 C 与 D 之间时，$\alpha>0$，$\beta>0$；当 M 在点 C 的左边时，$\alpha<0$，$\beta>0$；当 M 在点 D 的右边时 $\alpha>0$，$\beta<0$). 显然 $f(\alpha,\beta)$ 是连续函数；又当 $\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$ 时(这时点 M 从右边伸向无穷远，$\beta\to-\frac{\pi}{2}+0$)，显然 $f(\alpha,\beta)\to+\infty$；当 $\alpha\to-\frac{\pi}{2}+0$ 时(这时点 M 从左边伸向无穷远，$\beta\to\frac{\pi}{2}-0$)，显然也有 $f(\alpha,\beta)\to+\infty$. 由此可知 $f(\alpha,\beta)$ 在有限处达到最小值，此处必为临界点. 设

$$F=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_1\cos\beta}-\lambda(a\tan\alpha+b\tan\beta-d)$$

注意到由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}=\dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda a}{\cos^2\alpha}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial\beta}=\dfrac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta}-\dfrac{\lambda b}{\cos^2\beta}=0,\end{cases}$$

即得 $\dfrac{\sin\alpha}{v_1}=\lambda,\quad \dfrac{\sin\beta}{v_2}=\lambda.$

于是，在临界点必满足 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{v_1}{v_2}.$

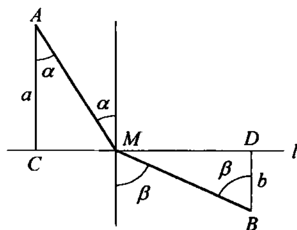


图 6.45

由此可知，光的传播路径必满足上面的关系. 这就是著名的光线折射定律. 此时，由点 A 到点 B 的光线传播所需要的时间最短.

【3707】 一折射棱镜的折射角为 α，折射率为 n. 光线以怎样的入射角射向此棱镜侧面，其偏向角(即入射线与出射线之间的角)为最小？求此最小偏向角.

解 如图 6.46 所示，ABC 为棱镜. $\angle BAC=\alpha$ 为棱镜顶角(即棱镜的折射角)，DE 为入射光线，折射后从 F 点折射出棱镜，射出线为 FG. IH 和 JH 分别为入射点和射出点的法线，它们相交于 H($IH\perp AC$，$JH\perp AB$). 入射线 DE 的延长线 DM 与射出线的反向延长线 FL 交于 K. 令 $\angle DEI=\beta$，$\angle GFJ=\gamma$，$\angle GKM=\delta$，$\angle HEF=\lambda$，$\angle EFH=\mu$.

按题意即问：当 β 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 之间的一定范围内变化时，δ 何时达到最小值. 这本是一元函数的极值问题，然因牵涉的变量关系太多，因此把它看作多元函数的条件极值问题.

由折射定律(3706 题)可知：

$$\sin\beta=n\sin\lambda,\tag{1}$$

$$\sin\gamma=n\sin\mu.\tag{2}$$

由几何关系不难求出 α、β、γ、δ、λ 及 μ 之间的关系：

$$\lambda+\mu=\alpha\tag{3}$$

$$\delta=\beta+\gamma-\alpha.\tag{4}$$

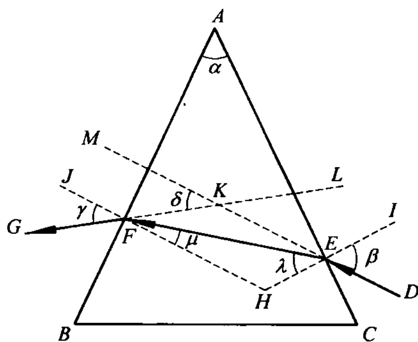


图 6.46

由于 α 为常数，故从(1)、(2)、(3)、(4)四式中消去 λ、μ 及 γ 就得到 δ 作为 β 的函数. 令

$$F(\beta,\gamma,\lambda,\mu)=\beta+\gamma-\alpha+k_1(\sin\beta-n\sin\lambda)+k_2(n\sin\mu-\sin\gamma)+k_3(\lambda+\mu-\alpha).$$

临界点适合下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\beta}=1+k_1\cos\beta=0, & (5)\\ \dfrac{\partial F}{\partial\gamma}=1-k_2\cos\gamma=0, & (6)\\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=-k_1 n\cos\lambda+k_3=0, & (7)\\ \dfrac{\partial F}{\partial\mu}=k_2 n\cos\mu+k_3=0. & (8)\end{cases}$$

由(7)、(8)消去 k_3，得

$$k_1\cos\lambda=-k_2\cos\mu. \tag{9}$$

由(5)、(6)得 $k_1=-\dfrac{1}{\cos\beta}$，$k_2=\dfrac{1}{\cos\gamma}$，代入(9)，两边平方，即得

$$\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\beta}=\frac{\cos^2\mu}{\cos^2\gamma}\quad\text{或}\quad\frac{1-\sin^2\lambda}{1-\sin^2\beta}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-\sin^2\gamma}. \tag{10}$$

将(1)、(2)代入(10)，得

$$\frac{1-\sin^2\lambda}{1-n^2\sin^2\lambda}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-n^2\sin^2\mu},$$

整理后得

$$(n^2-1)(\sin^2\lambda-\sin^2\mu)=0.$$

由于 $0<\lambda<\frac{\pi}{2}$，$0<\mu<\frac{\pi}{2}$，故 $\sin\lambda=\sin\mu$ 或 $\lambda=\mu$. 代入(3)，得 $\lambda=\mu=\frac{\alpha}{2}$. 从而，$\beta=\gamma=\arcsin(n\sin\frac{\alpha}{2})$. 于是，

$$\delta=\beta+\gamma-\alpha=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha.$$

所求得的 β 即为唯一的临界点.

根据物理知识，作为本题所讨论的对象：顶角较小的分光棱镜，在区域内确实存在着最小的折射. 于是，当入射角

$$\beta=\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

时，则

$$\delta=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha$$

应为最小偏向角. 至于作其他用途的各种棱镜，光线的折射路径不仅与顶角有关，而且大部分与整个棱镜的构造有关，这已不属于本题所考虑的对象，因而，也不再对它们进行讨论.

【3708】 变量 x 和 y 满足系数待定的线性方程 $y=ax+b$，
经过一系列精度相同的测量，对于量 x 和 y 得到值 x_i，y_i $(i=1,2,\cdots,n)$.

利用最小二乘法，求系数 a 和 b 的最可靠数值.

提示 根据最小二乘法，系数 a 和 b 的最可靠数值是这样的：对于它们，误差的平方和 $M=\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+$

$b-y_i)^2$ 为最小.

解 根据最小二乘法,系数 a 和 b 的最可靠数值是这样的:对于它们,误差的平方和

$$M=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

为最小.因此,上述问题可以通过求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0\end{cases}$$

的解来解决.记

$$[x,y]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\quad [x,x]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\quad [x,1]=\sum_{i=1}^{n}x_i\quad [y,1]=\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

则上述方程组化为

$$\begin{cases}a[x,x]+b[x,1]=[x,y],\\ a[x,1]+bn=[y,1].\end{cases}$$

系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i\neq j}x_ix_j=\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2.$$

当 $\Delta\neq0$ 时,方程组有唯一的一组解,且

$$a=\frac{\begin{vmatrix}[x,y] & [x,1]\\ [y,1] & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}}=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\Big)}{\sum\limits_{i\neq j}(x_i-x_j)^2},$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,y]\\ [x,1] & [y,1]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}}=\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\Big)-\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Big)}{\sum\limits_{i\neq j}(x_i-x_j)^2}.$$

显然,此时 M 为最小.因此,上述 a 和 b 即为所求.

【3709】 在平面上已知 n 个点 $M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$.直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 在怎样的位置时,这些点与此直线的偏差的平方和为最小?

解 已知点与直线的偏差平方和 $M(\alpha,p)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)^2$.

记

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.\quad \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\quad \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\quad \overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

则所求直线的参数 α 和 p 应满足方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial\alpha}&=2\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)(y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha)\\&=2\sum_{i=1}^{n}\Big[x_iy_i\cos2\alpha+(y_i^2-x_i^2)\frac{\sin2\alpha}{2}-y_ip\cos\alpha+x_ip\sin\alpha\Big]\\&=n[2\,\overline{xy}\cos2\alpha+(\overline{y^2}-\overline{x^2})\sin2\alpha-2p(\overline{y}\cos\alpha-\overline{x}\sin\alpha)]=0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial p}=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)=-2n(\overline{x}\cos\alpha+\overline{y}\sin\alpha-p)=0.\tag{2}$$

由(2)式,解得

$$p=\overline{x}\cos\alpha+\overline{y}\sin\alpha.\tag{3}$$

将(3)式代入(1)式,即可解出

$$\tan2\alpha=\frac{2(\overline{x}\cdot\overline{y}-\overline{xy})}{[\overline{x^2}-(\overline{x})^2][\overline{y^2}-(\overline{y})^2]}\ ^{*)}.\tag{4}$$

在$[0,2\pi)$范围内,(4)式的解α共有四个:

$$\alpha_0;\quad \alpha_0+\frac{\pi}{2};\quad \alpha_0+\pi;\quad \alpha_0+\frac{3\pi}{2};$$

其中$0\leqslant\alpha_0<\frac{\pi}{2}$.将这四个解代入(3)式可以求出$p$.根据习惯,取$p\geqslant0$,故上述四个$\alpha$只有两个满足$p\geqslant0$的要求**).记为$\alpha_1,p_1;\alpha_2,p_2$,这样就得到两条互相垂直的直线:

$$\begin{cases}x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0, & (5)\\ x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0. & (6)\end{cases}$$

显然,$M(\alpha,p)$一定在p为有限值的点上取得最小值.因此,只要比较$M(\alpha_1,p_1)$和$M(\alpha_2,p_2)$的值,M较小的那条直线即为所求***).

*) 当(4)式分母为零而分子不为零时,解为$2\alpha=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}$.当分子分母同时为零时,有无穷多个解,即任意一条过n个点的质心的直线均使$M(\alpha,p)$为最小,具体的讨论不进行了.

**) 也可能同时有一对或两对α使$p=0$,但此时代表的直线仍只有互相垂直的两条,只是直线方程(5)或(6)有两种不同的表示法而已.

***) 特殊情况下也可能有$M(\alpha_1,p_1)=M(\alpha_2,p_2)$,此时使$M$取得最小值的直线有两条.

【3710】 在区间(1,3)内用线性函数$ax+b$来近似地代替函数x^2,使得绝对偏差

$$\Delta=\sup|x^2-(ax+b)|\quad(1\leqslant x\leqslant3)$$

为最小.

解 考虑函数 $u(a,b)=\Delta^2=\sup\limits_{1\leqslant x\leqslant3}[x^2-(ax+b)]^2$, $f(x,a,b)=x^2-(ax+b)$.

由于$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-a$,故当固定$a,b$时,$f(x,a,b)$只在$x=\frac{a}{2}$处达到极值$f(\frac{a}{2},a,b)$.当限制$1\leqslant x\leqslant3$时,只有当$2<a<6$时,$f(x,a,b)$才可能在$1<x<3$内部达到极值.于是,

$$u(a,b)=\begin{cases}\max\left\{f^2(1,a,b),f^2(3,a,b),f^2\left(\frac{a}{2},a,b\right)\right\}, & 2<a<6,\\ \max\{f^2(1,a,b),f^2(3,a,b)\}, & a\leqslant2\text{ 或 }a\geqslant6.\end{cases}$$

从上式得知,对一切(a,b)均有$u(a,b)>0$.

设从上式已解出平面区域Ω_1,Ω_2及Ω_3,使得

$$u(a,b)=\begin{cases}f^2(1,a,b)=(1-a-b)^2, & (a,b)\in\Omega_1,\\ f^2(3,a,b)=(9-3a-b)^2, & (a,b)\in\Omega_2,\\ f^2\left(\frac{a}{2},a,b\right)=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2, & (a,b)\in\Omega_3,\end{cases}\quad 2<a<6.$$

由 [illegible],b)>0,不难看出$u(a,b)$在区域$\Omega_i(i=1,2,3)$内部均无临界点.再看区域边界的状况.以Ω_1及Ω_3 [illegible]为例.根据$u(a,b)$的连续性,即知在边界上有$u(a,b)=(1-a-b)^2$,且满足条件

$$(1-a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2.$$

下面我们求满足条件极值的必要条件的点.设

$$F(a,b)=(1-a-b)^2+\lambda\left[(1-a-b)^2-\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2\right],$$

则

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial a}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-\lambda a\left(\frac{a^2}{4}+b\right),\\ \frac{\partial F}{\partial b}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-2\lambda\left(\frac{a^2}{4}+b\right).\end{cases}$$

使$\frac{\partial F}{\partial a}=0$, $\frac{\partial F}{\partial b}=0$且满足条件$1-a-b\neq0$, $\frac{a^2}{4}+b\neq0$的点没有.

同法可证:在Ω_1,Ω_2及Ω_2,Ω_3的边界上也无临界点,但是,$u(a,b)$一定在区域内达到最小值.因此,只能在$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$的边界交点上取得最小值,即在满足方程

$$(1-a-b)^2=(9-3a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2 \tag{1}$$

的点(a,b)上取得最小值.方程(1)可转化为下面四组方程

$$\begin{cases} 1-a-b=9-3a-b=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (2)\\ 1-a-b=9-3a-b=\frac{a^2}{4}+b, & (3)\\ 1-a-b=-(9-3a-b)=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (4)\\ 1-a-b=-(9-3a-b)=\frac{a^2}{4}+b. & (5)\end{cases}$$

方程组(2)无解.

方程组(3)的解为$a=4$, $b=-\frac{7}{2}$.对应的$\Delta=\frac{1}{2}$.

方程组(4)的解为$a=2$, $b=1$.,对应的$\Delta=2$.

方程组(5)的解为$a=6$, $b=-7$,对应的$\Delta=2$.

综上所述,可知:在区间(1,3)内,用线性函数$4x-\frac{7}{2}$来近似地代替函数x^2,即可使绝对偏差Δ为最小,且$\Delta_{\min}=\frac{1}{2}$.

第七章　带参数的积分

§1. 带参数的常义积分

1° **积分的连续性**　若函数 $f(x,y)$ 在有界区域 $R[a\leqslant x\leqslant A;\ b\leqslant y\leqslant B]$ 内有定义并且是连续的，则

$$F(y)=\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x$$

是在闭区间 $b\leqslant y\leqslant B$ 上的连续函数.

2° **积分符号下的微分法**　若除在 1° 中所列的条件之外，并且偏导数 $f'_y(x,y)$ 在区域 R 内连续，则当 $b<y<B$ 时成立莱布尼茨公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^A f'_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

在更一般的情况下，当积分的下限和上限为参数 y 的可微函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$，并且当 $b<y<B$ 时 $a\leqslant\varphi(y)\leqslant A$，$a\leqslant\psi(y)\leqslant A$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x=f[\psi(y),y]\psi'(y)-f[\varphi(y),y]\varphi'(y)+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\mathrm{d}x\qquad(b<y<B).$$

3° **积分符号下的积分法**　在 1° 的条件下有

$$\int_b^B\mathrm{d}y\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^A\mathrm{d}x\int_b^B f(x,y)\mathrm{d}y.$$

【3711】　证明：不连续函数 $f(x,y)=\mathrm{sgn}(x-y)$ 的积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

为连续函数. 作出函数 $u=F(y)$ 的图像.

证明思路　当 $-\infty<y<0$ 时，$F(y)=1$；当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$F(y)=1-2y$；当 $1<y<+\infty$ 时，$F(y)=-1$. 由于

$$\lim_{y\to+0}F(y)=\lim_{y\to+0}(1-2y)=1,\quad \lim_{y\to-0}F(y)=\lim_{y\to-0}1=1$$

及 $F(0)=1$. 因此，$F(y)$ 在点 $y=0$ 处连续. 同理可证 $F(y)$ 在点 $y=1$ 处连续. 于是，函数 $F(y)$ 在 $-\infty<y<+\infty$ 内连续. $u=F(y)$ 的图像如图 7.1 所示.

证　当 $-\infty<y<0$ 时，$F(y)=\int_0^1 1\cdot\mathrm{d}x=1$；

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$F(y)=\int_0^y(-1)\mathrm{d}x+\int_y^1 1\cdot\mathrm{d}x=1-2y$；

当 $1<y<+\infty$ 时，$F(y)=\int_0^1(-1)\mathrm{d}x=-1$.

由于

$$\lim_{y\to+0}F(y)=\lim_{y\to+0}(1-2y)=1,\quad \lim_{y\to-0}F(y)=1$$

且 $F(0)=1$，即有　　$F(+0)=F(-0)=F(0)$，

故 $u=F(y)$ 当 $y=0$ 时为连续的.

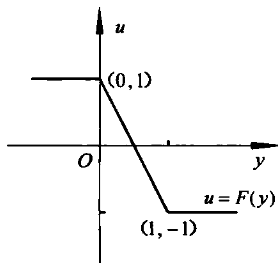


图 7.1

同法可证 $u=F(y)$ 当 $y=1$ 时为连续的. 当 $y\neq0,y\neq1$ 时，$u=F(y)$ 显然连续. 于是，$u=F(y)$ 在整个 Oy 轴上均为连续的. 如图 7.1 所示.

【3712】　研究函数　　$F(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$

的连续性，其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是正的连续函数.

提示 可证函数 $F(y)$ 在点 $y=0$ 处不连续.

解 当 $y\neq 0$ 时，被积函数是连续的. 因此，$F(y)$ 为连续函数.

当 $y=0$ 时，显然有 $F(0)=0$.

当 $y>0$ 时，设 m 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值，则 $m>0$. 由于

$$F(y)\geqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=m\arctan\frac{1}{y} \quad 及 \quad \lim_{y\to+0}\arctan\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2},$$

故有
$$\lim_{y\to+0}F(y)\geqslant\frac{m\pi}{2}>0.$$

于是，$F(y)$ 当 $y=0$ 时不连续.

【3713】 求：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$； (2) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$； (3) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\mathrm{d}x$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

解 (1) 因为 $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$，α，$1+\alpha$ 都是 α 的连续函数，故含参变量 α 的积分 $F(\alpha)=\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$ 是 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上的连续函数，因此，

$$\lim_{\alpha\to0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to0}F(\alpha)=F(0)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 同样，$F(\alpha)=\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$ 是 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上的连续函数，因此，

$$\lim_{\alpha\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to0}F(\alpha)=F(0)=\int_{-1}^1\sqrt{x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1.$$

(3) 同样，$F(\alpha)=\int_0^2 x^2\cos\alpha x\mathrm{d}x$ 是 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上的连续函数，因此，

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to0}F(\alpha)=F(0)=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

(4) 考虑二元函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & 0\leqslant x\leqslant1,0<y\leqslant1,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & 0\leqslant x\leqslant1,y=0.\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{u\to+0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$ 易知 $f(x,y)$ 是 $0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$ 上的连续函数. 从而，积分 $F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 $0\leqslant y\leqslant1$ 上的连续函数，因此，$\lim\limits_{y\to+0}F(y)=F(0)$，从而，更有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}F\left(\frac{1}{n}\right)=F(0)=\int_0^1 f(x,0)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\Big|_0^1=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.$$

【3714】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续. 证明：

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=f(x)-f(a)\quad(A<a<x<B).$$

证明思路 只要注意 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，故它在 $[A,B]$ 上存在原函数 $F(x)$，即 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$F'(x)=f(x)$ $(A\leqslant x\leqslant B)$. 将所要证明等式左端的极限用函数 $F(x)$ 表出，即易获证.

证 由于 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，故在 $[A,B]$ 上存在原函数 $F(x)$. 于是，

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(a+h)-F(x)+F(a)]$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to+0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).$$

【3715】 在表达式
$$\lim_{y\to0}\int_0^1\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\mathrm{d}x$$

中，可否在积分符号下完成极限运算？

解 不能.事实上，

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Big|_0^1\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{y^2}}\right)=\frac{1}{2},$$

而

$$\int_0^1\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)dx=\int_0^1 0\cdot dx=0.$$

【3716】 当 $y=0$ 时，可否根据莱布尼茨法则计算函数

$$F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

的导数？

提示 当 $y=0$ 时，不能在积分号下求导数，就是求右导数或左导数也不行.

解 不能.事实上，我们有：当 $y\neq 0$ 时，

$$F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx=x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}dx$$

$$=\ln\sqrt{1+y^2}-\int_0^1\left(1-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)dx=\ln\sqrt{1+y^2}-1+y\arctan\frac{1}{y}.$$

又有

$$F(0)=\int_0^1 \ln x\,dx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 dx=-1.$$

由此可知

$$F'_+(0)=\lim_{y\to+0}\frac{F(y)-F(0)}{y}=\lim_{y\to+0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\arctan\frac{1}{y}\right]=\frac{\pi}{2},$$

$$F'_-(0)=\lim_{y\to-0}\frac{F(y)-F(0)}{y}=\lim_{y\to-0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\arctan\frac{1}{y}\right]=-\frac{\pi}{2},$$

故 $F'(0)$ 不存在.

另一方面，当 $x>0$ 时，

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}=\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}\equiv 0,$$

故

$$\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}dx=0.$$

由此可知，当 $y=0$ 时不能在积分号下求导数，就是求右导数或求左导数也不行，因为

$$F'_+(0)=\frac{\pi}{2}\neq 0=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}dx,\quad F'_-(0)=-\frac{\pi}{2}\neq 0=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}dx.$$

【3717】 若

$$F(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy,$$

计算 $F'(x)$.

解 $F'(x)=\frac{d}{dx}(x^2)e^{-xy^2}\Big|_{y=x^2}-\frac{dx}{dx}e^{-xy^2}\Big|_{y=x}+\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy^2})dy=2xe^{-x^5}-e^{x^3}-\int_x^{x^2}y^2e^{-xy^2}dy.$

【3718】 设：

(1) $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$； (2) $F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$； (3) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$；

(4) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)dx$； (5) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy$，

求 $F'(\alpha)$.

解 (1) $F'(\alpha)=-\sin\alpha e^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha e^{\alpha|\cos\alpha|}+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx.$

(2) $F'(\alpha)=\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}+\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x\,dx$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha).$$

(3) $F'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)+\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha x}dx=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$.

(4) 设 $u=x+\alpha$, $v=x-\alpha$，则 $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(u,v)dx$. 于是，

$$
\begin{aligned}
F'(\alpha)&=f(2\alpha,0)+\int_0^{\alpha}[f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]dx\\
&=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)dx-\int_0^{\alpha}[f'_u(u,v)+f'_v(u,v)]dx\\
&=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)dx-\int_0^{\alpha}\frac{d}{dx}f(u,v)dx\\
&=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)dx-f(x+\alpha,x-\alpha)\Big|_{x=0}^{x=\alpha}\\
&=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)dx-[f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha)]\\
&=f(\alpha,-\alpha)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)dx.
\end{aligned}
$$

(5) $F'(\alpha)=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)dy+\int_0^{\alpha^2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy\right]dx$

$$
\begin{aligned}
&=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)dy+\int_0^{\alpha^2}\Big\{\sin[x^2+(x+\alpha)^2-\alpha^2]-\sin[x^2+(x-\alpha)^2-\alpha^2](-1)\\
&\quad+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)dy\Big\}dx\\
&=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)dy+\int_0^{\alpha^2}\Big\{\sin(2x^2+2\alpha x)+\sin(2x^2-2\alpha x)+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)dy\Big\}dx\\
&=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)dy+2\int_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cos 2\alpha x\,dx-2\alpha\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)dy.
\end{aligned}
$$

【3719】 若

$$F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)dy,$$

其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $F''(x)$.

解 $F'(x)=2xf(x)+\int_0^x f(y)dy$, $F''(x)=2f(x)+2xf'(x)+f(x)=3f(x)+2xf'(x)$.

【3720】 设

$$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|dy,$$

其中 $a<b$ 及 $f(y)$ 为可微函数，求 $F''(x)$.

提示 分别就 $x\in(a,b)$ 及 $x\overline{\in}(a,b)$ 两种情况求解.

解 当 $x\in(a,b)$ 时，由于

$$F(x)=\int_a^x(x-y)f(y)dy+\int_x^b(y-x)f(y)dy,$$

故有

$$
\begin{aligned}
F'(x)&=\frac{d}{dx}\int_a^x(x-y)f(y)dy-\frac{d}{dx}\int_b^x(y-x)f(y)dy\\
&=\int_a^x\frac{\partial}{\partial x}[(x-y)f(y)]dy-\int_b^x\frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]dy=\int_a^x f(y)dy+\int_b^x f(y)dy,
\end{aligned}
$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

当 $x\overline{\in}(a,b)$ 时，例如 $x\leqslant a$，则 $F(x)=\int_a^b(y-x)f(y)dy$，故有

$$F'(x)=\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]dy=-\int_a^b f(y)dy,\quad F''(x)=0;$$

同理，对于 $x\geqslant b$ 也可得 $F''(x)=0$. 总之，

$$F''(x)=\begin{cases}2f(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x\overline{\in}(a,b).\end{cases}$$

【3721】 设 $$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta\quad(h>0),$$

其中 $f(x)$ 为连续函数,求 $F''(x)$.

解 $F(x)=\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta=\dfrac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u)du.$

于是,

$$F'(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+\xi}^{x+\xi+h}f(u)du\right]d\xi$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h[f(x+\xi+h)-f(x+\xi)]d\xi=\frac{1}{h^2}\left[\int_{x+h}^{x+2h}f(u)du-\int_x^{x+h}f(u)du\right],$$

$$F''(x)=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-f(x+h)-f(x+h)+f(x)]$$

$$=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)].$$

【3722】 设 $$F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt,$$

求 $F^{(n)}(x)$.

解 $F'(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}[f(t)(x-t)^{n-1}]dt=(n-1)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-2}dt,$

$$F''(x)=(n-1)(n-2)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-3}dt,$$

$$\vdots$$

$$F^{(n-1)}(x)=(n-1)!\int_0^x f(t)dt,$$

最后得 $$F^{(n)}(x)=(n-1)!\,f(x).$$

【3723】 在区间 $1\leqslant x\leqslant 3$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似地代替函数 $f(x)=x^2$,使得

$$\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx=\min.$$

解 设 $F(a,b)=\displaystyle\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$,则由于 $F(a,b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数,并且易知当 $r=\sqrt{a^2+b^2}\to+\infty$ 时,$F(a,b)\to+\infty$,故 $F(a,b)$ 必在有限处取得最小值.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=2\displaystyle\int_1^3(a+bx-x^2)dx=4a+8b-\frac{52}{3}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=2\displaystyle\int_1^3 x(a+bx-x^2)dx=8a+\frac{52}{3}b-40=0\end{cases}$$

得唯一的一组解 $a=-\dfrac{11}{3}$, $b=4$.

于是,当 $a=-\dfrac{11}{3}$, $b=4$,时 $F(a,b)$ 达最小值,即所求的线性函数为 $4x-\dfrac{11}{3}$.

【3724】 依条件:函数 $a+bx$ 及 $\sqrt{1+x^2}$ 在已知区间$[0,1]$上的均方偏差为最小,求近似公式

$$\sqrt{1+x^2}\approx a+bx\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

解 按题设,即在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似代替函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,使得

$$\int_0^1(a+bx-\sqrt{1+x^2})^2dx=\min.$$

设 $F(a,b)=\displaystyle\int_0^1(a+bx-\sqrt{1+x^2})^2dx$,则 $F(a,b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数,并且易知当 $r=\sqrt{a^2+b^2}\to+\infty$ 时,$F(a,b)\to+\infty$,故 $F(a,b)$ 必在有限处取得最小值.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=2\int_0^1(a+bx-\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x=2a+b-[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=2\int_0^1 x(a+bx-\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x=a+\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)=0\end{cases}$$

得唯一的一组解 $a\approx0.934$，$b\approx0.427$.

于是，当 $a\approx0.934$，$b\approx0.427$ 时，$F(a,b)$ 为最小值，即所求的近似公式为

$$\sqrt{1+x^2}\approx0.934+0.427x\quad(0\leqslant x\leqslant1).$$

【3725】 求完全椭圆积分 $$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

及 $$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad(0<k<1)$$

的导数，并把它们用函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 表示出来.

证明：$E(k)$ 满足微分方程 $$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

提示 注意 $E'(k)=\dfrac{E(k)-F(k)}{k}$ 及 $F'(k)=-\dfrac{F(k)}{k}+\dfrac{E(k)}{k(1-k^2)}$.

解 $$E'(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k^2\sin^2\varphi-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right]-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{E(k)-F(k)}{k}.\tag{1}$$

$$F'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

我们易证 $$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}]$$

故有 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varphi.$$

于是，

$$F'(k)=-\frac{F(k)}{k}+\frac{E(k)}{k(1-k^2)}.\tag{2}$$

由(1)式，对 k 再求导数，并注意到(2)式，即得

$$E''(k)=\frac{[E'(k)-F'(k)]k-[E(k)-F(k)]}{k^2}=\frac{\left[\dfrac{E(k)-F(k)}{k}+\dfrac{F(k)}{k}-\dfrac{E(k)}{k(1-k^2)}\right]k-kE'(k)}{k^2}$$

$$=-\frac{E(k)}{1-k^2}-\frac{E'(k)}{k},$$

即 $$E''(k)+\frac{E'(k)}{k}+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

【3726】 证明：阶数 n 为整数的贝塞尔函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

满足贝塞尔方程 $$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

证 $J_n'(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$，　　$J_n''(x)=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

于是，

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[(x^2\sin^2\varphi+n^2-x^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)-x\sin\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)]d\varphi$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[(n^2-x^2\cos^2\varphi)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)-x\sin\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)]d\varphi$$

$$=-\frac{1}{\pi}(n+x\cos\varphi)\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\Big|_0^\pi=0,$$

本题获证.

【3727】 设
$$I(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$
其中函数 $\varphi(x)$ 及其导数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续.

证明：当 $0<\alpha<a$ 时，有
$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx.$$

提示 令 $x=\alpha t$.

证 当 $x=\alpha$ 时，一般说来被积函数变成无穷，所以，我们不能直接在积分号下求导数. 设 $x=\alpha t$，则此积分变成以下形式
$$I(\alpha)=\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt.$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在[0,1]上绝对可积，故可利用积分号下求导数的公式. 于是，
$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt+\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{t\varphi'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt.$$

再将 $x=\alpha t$ 代入上式，得
$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx. \tag{1}$$

利用分部积分法可得
$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\varphi(0)+\frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\varphi'(x)dx. \tag{2}$$

另一方面，又有
$$\int_0^\alpha\frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx=-\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\,\varphi'(x)dx+\alpha\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx. \tag{3}$$

将(2)式及(3)式代入(1)式，最后得 $I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx.$

【3728】 设
$$u(x)=\int_0^1K(x,y)v(y)dy,$$
其中
$$K(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & x\leqslant y,\\ y(1-x), & x>y,\end{cases}$$
及 $v(y)$ 都是连续的. 证明：函数 $u(x)$ 满足方程
$$u''(x)=-v(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

证 由题设得
$$u(x)=\int_0^x y(1-x)v(y)dy+\int_x^1 x(1-y)v(y)dy.$$

于是，求导数即得
$$u'(x)=x(1-x)v(x)-\int_0^x yv(y)dy-x(1-x)v(x)+\int_x^1(1-y)v(y)dy$$
$$=-\int_0^x yv(y)dy+\int_x^1(1-y)v(y)dy,$$
$$u''(x)=-xv(x)-(1-x)v(x)=-v(x),$$

所以，函数 $u(x)$ 满足方程 $u''(x)=-v(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$

【3729】 设
$$F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)dz,$$

其中 $f(z)$ 为可微函数，求 $F''_{xy}(x,y)$.

解 $F'_x(x,y)=y(x-xy^2)f(xy)+\int_{\frac{x}{y}}^{xy}f(z)\mathrm{d}z$,

$$F''_{xy}=(x-xy^2)f(xy)+y(-2xy)f(xy)+y(x-xy^2)f'(xy)x+xf(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=x(2-3y^2)f(xy)+x^2y(1-y^2)f'(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right).$$

【3730】 设 $f(x)$ 为二阶可微函数及 $F(x)$ 为可微函数. 证明：函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)\mathrm{d}z$$

满足弦的振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及初始条件：$u(x,0)=f(x)$，$u'_t(x,0)=F(x)$.

证 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]+\frac{1}{2}F(x+at)+\frac{1}{2}F(x-at)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}[a^2f''(x-at)+a^2f''(x+at)]+\frac{a}{2}F'(x+at)-\frac{a}{2}F'(x-at). \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]+\frac{1}{2a}F(x+at)-\frac{1}{2a}F(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}F'(x+at)-\frac{1}{2a}F'(x-at). \tag{2}$$

比较(1)式及(2)式，即得 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. 此外，还有

$$u(x,0)=\frac{1}{2}[f(x-0\cdot t)+f(x+0\cdot t)]+\frac{1}{2a}\int_{x-0\cdot t}^{x+0\cdot t}F(z)\mathrm{d}z=f(x),$$

$$u'_t(x,0)=\frac{1}{2}[-af'(x)+af'(x)]+\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(x)=F(x).$$

本题获证.

【3731】 证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,l]$ 上连续，且当 $0\leqslant\xi\leqslant l$ 时 $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq0$，则函数

$$u(x,y,z)=\int_0^l\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

满足拉普拉斯方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

证 利用积分号下的求导法则，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\int_0^l\frac{2(x-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi}{2[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}=-\int_0^l\frac{(x-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^l\frac{f(\xi)[2(x-\xi)^2-y^2-z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}\xi. \tag{1}$$

同法可得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\int_0^l\frac{f(\xi)[-(x-\xi)^2+2y^2-z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}\xi. \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\int_0^l\frac{f(\xi)[-(x-\xi)^2-y^2-2z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}\xi. \tag{3}$$

将(1)、(2)、(3)三式相加，即证得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

应用对参数的微分法，计算下列积分：

【3732】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$.

解 将 b 视为常数，a 视为参变量. 令

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x.$$

先设 $a>0,b>0$ 我们有 $$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x;$$

若 $a=b$，有 $I'(b)=\frac{2}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2b}$.

若 $a\neq b$，则作代换 $t=\tan x$，得

$$I'(a)=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)\left(t^2+\frac{b^2}{a^2}\right)}=\frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\arctan t-\frac{b^2}{a^2-b^2}\;\frac{a}{b}\arctan\frac{at}{b}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{a+b}.$$

因此，$$I'(a)=\frac{\pi}{a+b}\quad(0<a<+\infty).$$

积分之，得 $$I(a)=\pi\ln(a+b)+C\quad(0<a<+\infty),$$

其中 C 为某常数. 令 $a=b$，得 $$I(b)=\pi\ln 2b+C,$$

而 $I(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln b^2\mathrm{d}x=\pi\ln b$，代入，解之，得 $C=\pi\ln\frac{1}{2}$. 于是，

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+\pi\ln\frac{1}{2}=\pi\ln\frac{a+b}{2}\quad(0<a<+\infty).$$

若 $a<0$ 或 $b<0$，则可化为 $a>0$ 且 $b>0$ 的情形，得

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(|a|^2\sin^2x+|b|^2\cos^2x)\mathrm{d}x=I(|a|)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

于是，不论 a,b 是正是负，在任何情形，均有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

【3733】 $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x.$

解题思路 令 $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$.

当 $|a|<1$ 时，可在积分号下求导数，并利用 2028 题(1)的结果，易得 $I(a)=0$.

当 $|a|>1$ 时，令 $b=\frac{1}{a}$，可得 $I(a)=2\pi\ln|a|$.

当 $|a|=1$ 时，利用 2353 题(1)的结果，可得 $I(a)=0$.

解 设 $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$. 当 $|a|<1$ 时，由于

$$1-2a\cos x+a^2\geqslant 1-2|a|+a^2=(1-|a|)^2>0,$$

故 $\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 为连续函数且具有连续导数，从而可在积分号下求导数. 将 $I(a)$ 对 a 求导数，得

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+a^2)-2a\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\cos x}=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\arctan\left(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi^{*)}}=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\;\frac{\pi}{2}=0.$$

于是，当 $|a|<1$ 时，$I(a)=C$(常数). 但是，$I(0)=0$，故 $C=0$. 从而，$I(a)=0$.

当 $|a|>1$ 时，令 $b=\frac{1}{a}$，则 $|b|<1$，并有 $I(b)=0$. 于是，我们有

$$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)\mathrm{d}x=I(b)-2\pi\ln|b|=-2\pi\ln|b|=2\pi\ln|a|.$$

当 $|a|=1$ 时，有

$$I(1)=\int_0^{\pi}\ln 2(1-\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\ln 4+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t=2\pi\ln 2+4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{**)}=0;$$

同法可求得 $I(-1)=0$.

综上所述,故知 $$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & |a|\leqslant 1,\\ 2\pi\ln|a|, & |a|>1.\end{cases}$$

*) 利用 2028 题(1)的结果.

**) 利用 2353 题(1)的结果.

【3734】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

解 令 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x,a)\mathrm{d}x$,其中 $f(x,a)=\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}$. 本来 $f(x,a)$ 在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 时无定义,但因 $\lim\limits_{x\to+0}f(x,a)=a$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x,a)=0$,故若补充定义 $f(0,a)=a$, $f\left(\frac{\pi}{2},a\right)=0$,则 $f(x,a)$ 为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $-\infty<a<+\infty$ 上的连续函数.

又当 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $-\infty<a<+\infty$ 时,有

$$f'_a(x,a)=\frac{1}{\tan x}\,\frac{\tan x}{1+a^2\tan^2 x}=\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}.$$

而按规定 $f(0,a)=a$, $f\left(\frac{\pi}{2},a\right)=0$,故

$$f'_a(0,a)=1,\quad f'_a\left(\frac{\pi}{2},a\right)=0.$$

由此可知, $$f'_a(x,a)=\begin{cases}\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\ -\infty<a<+\infty,\\ 0, & x=\frac{\pi}{2},\ -\infty<a<+\infty.\end{cases}$$

显然 $f'_a(x,a)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0<a<+\infty$ 上连续,在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $-\infty<a<0$ 上也连续(注意,在点 $x=\frac{\pi}{2}$, $a=0$ 不连续),故由积分号下求导数法则知,

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x}\quad(0<a<+\infty\ \text{或}\ -\infty<a<0).$$

作代换 $\tan x=t$,得(当 $a^2\neq 1$ 时)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{a^2}{a^2t^2+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2(1+|a|)}.$$

若 $a^2=1$,则 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

总之,有 $$I'(a)=\frac{\pi}{2(1+|a|)}\quad(0<a<+\infty\text{或}-\infty<a<0).$$

积分之,得 $$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+C_1\quad(0<a<+\infty),$$

$$I(a)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)+C_2\quad(-\infty<a<0),$$

其中 C_1,C_2 是两个常数. 由于上面已述 $f(x,a)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $-\infty<a<+\infty$ 上连续,故 $I(a)$ 在 $-\infty<a<+\infty$ 上连续,因此 $\lim\limits_{a\to0+0}I(a)=\lim\limits_{a\to0-0}I(a)=I(0)$;但 $I(0)=0$, $\lim\limits_{a\to0+0}I(a)=C_1$, $\lim\limits_{a\to0-0}I(a)=C_2$,故 $C_1=C_2=0$. 于是,最后得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\ln(1+|a|)\quad(-\infty<a<+\infty).$$

【3735】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\quad(|a|<1)$.

解 解法 1:

设 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}$. 由于

$$\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=\frac{1-a^2\cos^2 x}{1-2a\cos x+a^2\cos^2 x}\geqslant\frac{1-a^2}{1+2|a|+a^2}=\frac{1-a^2}{(1+|a|)^2}>0,$$

故 $\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}$ 为连续函数. 又由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+at)-\ln(1-at)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{a}{1+at}-\frac{-a}{1-at}}{1}=2a,$$

今补充被积函数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的值为 $2a$，即易知被积函数为连续函数，且它对 a 有连续导数，从而，可在积分号下求导数，得

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+a\cos x}+\frac{1}{1-a\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{x}{2}\right)+\arctan\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}\,*)}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

从而，$I(a)=\pi\arcsin a+C$ $(|a|<1)$. 又 $I(0)=0$，故 $C=0$. 于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin a\quad(|a|<1).$$

*） 利用 2028 题(1)的结果.

解法 2：

把被积函数表成下述积分形式

$$\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2a\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x}.$$

注意，此式当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时也成立，此时左端应理解为其极限值

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2a.$$

于是，当 $a\neq 0$ 时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x}=2a\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}$$

$$=2a\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2y^2}}dy^{**)}=\pi a\cdot\frac{1}{a}\arcsin ay\Big|_0^1=\pi\arcsin a;$$

当 $a=0$ 时，原积分显然为零. 因此，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin a\quad(|a|<1).$$

**） 利用 2028 题(1)的结果，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+ay\cos x}+\frac{1}{1-ay\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{1-a^2y^2}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-ay}{1+ay}}\tan\frac{x}{2}\right)+\arctan\left(\sqrt{\frac{1+ay}{1-ay}}\tan\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{1-a^2y^2}}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2y^2}}.$$

【3736】 利用公式 $\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}$. 计算积分 $\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}$.

由于函数$\frac{1}{1+x^2y^2}$在 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，上连续，且$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在$[0,1]$上绝对可积，故上述积分号可交换

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}. \tag{1}$$

作代换 $x=\cos t$，可得

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\cos^2 t}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\arctan\left(\frac{\tan t}{\sqrt{1+y^2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}. \tag{2}$$

于是，由(1)式及(2)式即得

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1 \frac{\pi dy}{2\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

【3737】 应用积分号下的积分法，计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \quad (a>0,b>0).$$

解 首先注意，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=0,\quad \lim_{x\to 1-0}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{bx^{b-1}-ax^{a-1}}{x^{-1}}=\lim_{x\to 1-0}(bx^b-ax^a)=b-a,$$

故$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$不是广义积分，并且，如果补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0，在 $x=1$ 时的值为 $b-a$，则可理解为$[0,1]$上连续函数的积分. 由于

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

（注意，$x=0$ 时左端规定为 0，$x=1$ 时右端规定为 $b-a$），而函数 x^y 在 $0\leqslant x\leqslant 1$，$a\leqslant y\leqslant b$ 上连续（不妨设 $a<b$），故有

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b \frac{dy}{1+y}=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

【3738】 计算积分：

(1) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$；　(2) $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-a^a}{\ln x}dx \quad (a>0,b>0)$.

解 (1)不妨设 $a<b$.

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy=\int_a^b dy\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx,$$

这里，当 $x=0$ 时，$\sin(\ln\frac{1}{x})x^y$ 理解为零，从而，$\sin(\ln\frac{1}{x})x^y$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$，$a\leqslant y\leqslant b$ 上连续，故可应用积分号下的积分法交换积分次序.

作代换 $x=e^{-t}$，可得

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx=\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t}\sin t dt=\frac{1}{1+(1+y)^2}[-(y+1)\sin t-\cos t]e^{-(y+1)t}\Big|_0^{+\infty *)}$$

$$=\frac{1}{1+(1+y)^2}.$$

于是，最后得

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b \frac{dy}{1+(1+y)^2}=\arctan(1+y)\Big|_a^b$$

$$=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)=\arctan\frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}.$$

(2)同(1)并利用 1828 题的结果易得

$$\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b dy\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx=\int_a^b \frac{1+y}{1+(1+y)^2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\ln[1+(1+y)^2]\Big|_a^b=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

*) 利用 1829 题的结果.

【3739】 设 $F(k)$ 和 $E(k)$ 为完全椭圆积分(参阅习题 3725). 证明公式:

(1) $\int_0^k F(k)k\mathrm{d}k=E(k)-k_1^2F(k)$; (2) $\int_0^k E(k)k\mathrm{d}k=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]$,

其中 $k_1^2=1-k^2$.

证明思路 利用 3725 题的结果,可得

$$[E(k)-k_1^2F(k)]'=kF(k) \quad 及 \quad \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]'=kE(k),$$

从而,公式(1)及(2)可获证.

证 (1)利用 3725 题的结果,可得

$$[E(k)-k_1^2F(k)]'=E'(k)+2kF(k)-(1-k^2)F'(k)$$

$$=\frac{E(k)-F(k)}{k}+2kF(k)-(1-k^2)\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\right]=kF(k).$$

于是, $$E(k)-k_1^2F(k)=\int_0^k kF(k)\mathrm{d}k+C,$$

其中 C 为常数. 但当 $k=0$ 时,上式左端为 $E(0)-F(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$,而右端等于 C,故 $C=0$. 最后证得

$$\int_0^k kF(k)\mathrm{d}k=E(k)-k_1^2F(k).$$

(2) 由于

$$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]'=\frac{1}{3}[2kE(k)+(1+k^2)E'(k)+2kF(k)-(1-k^2)F'(k)]$$

$$=\frac{1}{3}\left\{2kE(k)+(1+k^2)\frac{E(k)-F(k)}{k}+2kF(k)-(1-k^2)\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\right]\right\}=kE(k),$$

故 $$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]=\int_0^k kE(k)\mathrm{d}k+C,$$

以 $k=0$ 代入上式,得 $C=0$. 于是,最后证得

$$\int_0^k kE(k)\mathrm{d}k=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)].$$

【3740】 证明公式: $$\int_0^x xJ_0(x)\mathrm{d}x=xJ_1(x),$$

其中 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 为阶数是 0 与 1 的贝塞尔函数(参阅习题 3726).

证

$$\int_0^x uJ_0(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi}\int_0^x u\mathrm{d}u\int_0^\pi \cos(-u\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x u\mathrm{d}u\int_0^\pi [\cos(\varphi-u\sin\varphi)\cos\varphi+\sin(\varphi-u\sin\varphi)\sin\varphi]\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^\pi u\cos(\varphi-u\sin\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^\pi u\sin(\varphi-u\sin\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)\mathrm{d}(u\sin\varphi)+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^x u\sin(\varphi-u\sin\varphi)\mathrm{d}(u\sin\varphi-\varphi)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)\mathrm{d}(u\sin\varphi-\varphi)+\frac{1}{\pi}\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^x u\mathrm{d}\cos(\varphi-u\sin\varphi)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^x \cos(\varphi-u\sin\varphi)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=xJ_1(x),$$

上述各式中的被积函数显然为 u 及 φ 的二元连续函数,因此,交换积分顺序是合理的.本题获证.

§2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性

$1°$ **一致收敛性的定义** 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty, y_1<y<y_2$ 内是连续的.若对于任何 $\varepsilon>0$,都存在数 $B=B(\varepsilon)$,使得在 $b\geqslant B$ 的条件下有

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \quad (y_1<y<y_2),$$

则称广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1}$$

在区间 (y_1,y_2) 内一致收敛.

积分(1)的一致收敛与形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2}$$

(其中 $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$)的一切级数的一致收敛等价.

若积分(1)在区间 (y_1,y_2) 中一致收敛,则在这个区间内它是参数 y 的**连续函数**.

$2°$ **柯西准则** 积分(1)在区间 (y_1,y_2) 内一致收敛的充分必要条件为:对于任何 $\varepsilon>0$,存在数 $B=B(\varepsilon)$,使得只要 $b'>B$ 及 $b''>B$,则

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \quad (y_1<y<y_2).$$

$3°$ **魏尔斯特拉斯准则**. 积分(1)一致收敛的充分条件为:存在与参数 y 无关的强函数 $F(x)$,使得

(1) 当 $a\leqslant x<+\infty$ 时 $|f(x,y)|\leqslant F(x)$, (2) $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x<+\infty$.

$4°$ 对于不连续函数的广义积分有类似的定理.

求积分的收敛域:

【3741】 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

提示 当 $a\geqslant 0$ 时,由 $\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$ 易知积分收敛.当 $a<0$ 时,积分发散.

解 当 $a\geqslant 0$ 时,$\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$.而积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2},$$

故原积分收敛.

当 $a<0$ 时,原积分显然发散.于是,积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛域为 $a\geqslant 0$ 的一切 a 值.

【3742】 $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$.

解 首先注意
$$\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'=\frac{(1-p)x^p+(1-q)x^q}{(x^p+x^q)^2}.$$

若 $\max(p,q)>1$,则显然当 x 充分大时 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'<0$,从而,当 x 充分大时函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 是递减的,并且很明显,这时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^p+x^q}=0$.又因 $\left|\int_\pi^A\cos x\mathrm{d}x\right|=|\sin A|\leqslant 1$ (对任何 $A>\pi$),故知 $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $\max(p,q)\leqslant 1$，则恒有 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'\geqslant 0$，故函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 在 $x\geqslant\pi$ 上是递增的. 于是，对于任何正整数 n，有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x>\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\;\frac{\pi}{\pi^p+\pi^q}\;\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8(\pi^p+\pi^q)}=\text{常数}>0,$$

故不满足柯西收敛准则，因此，积分 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

【3743】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}\mathrm{d}x$.

解 若 $q=0$，则由于积分 $\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 仅当 $p>1$ 时收敛，而积分 $\int_0^A\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 仅当 $p>1$ 时收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 1}{x^p}\mathrm{d}x$ 对于任何的 p 值及 $q=0$ 发散.

若 $q\neq 0$，则积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^{-p}\sin x^q\mathrm{d}x$，利用 2380 题的结果即知：当 $\left|\frac{1-p}{q}\right|<1$ 时，原积分收敛.

【3744】 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}$.

解题思路 先考虑积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_0^1\ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$，并利用 2362 题的结果. 再考虑积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$，由 $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^p\frac{1}{\ln^p x}=1$ 可知积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$ 与积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^p}$ 有相同的敛散性. 综合上述两个积分的结果即可求得原积分的收敛域.

解 考虑积分

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p\left(\frac{1}{x}\right)}=\int_0^1\ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

利用 2362 题的结果即知：它当 $-p>-1$ 或 $p<1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$. 由于

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)^p\frac{1}{\ln^p x}=\left[\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right]^p=\left[\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^{-1}}\right]^p=1.$$

故积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$ 与积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^p}$ 具有相同的敛散性，而后者显然当 $p<1$ 时收敛，$p\geqslant 1$ 时发散，从而，前者亦然.

于是，仅当 $p<1$ 时，积分 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}$ 收敛.

【3745】 $\int_0^1\frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1\frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}\;\sqrt[n]{1+x}}\mathrm{d}x.$

由于当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，对于任意的 n，$\sqrt[n]{1+x}$ 与 $\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}$ 都是单调有界函数，故原积分与积分 $\int_0^1\frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}}\mathrm{d}x$ 同敛散. 对此积分代换 $t=\frac{1}{1-x}$，则得 $\int_0^1\frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t.$

易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ 仅当 $\alpha>0$ 时收敛. 事实上，当 $\alpha>0$ 时它显然收敛. 当 $\alpha=0$ 时它显然发散. 当 $\alpha<0$ 时，令 $\beta=-\alpha$ $(\beta>0)$，则对于正整数 n 有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} t^{\beta}\cos t\mathrm{d}t > (2n\pi)^{\beta}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} \to +\infty \quad (n\to\infty),$$

故积分 $\int_1^{+\infty} t^{\beta}\cos t\mathrm{d}t$ 发散.

于是,积分 $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 仅当 $2-\frac{1}{n}>0$ 时收敛,即仅当$n<0$或 $n>\frac{1}{2}$时收敛.

【3746】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x \quad (p>0).$

解 因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{p-1}+\frac{\sin x}{x}}=\begin{cases}1, & p>1,\\ \frac{1}{2}, & p=1,\\ 0, & p<1,\end{cases}$$

故 $x=0$ 不是积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x$ 的瑕点,因此,只要讨论积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x(p>0)$的敛散性.由于

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)},$$

而 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛(当 $p>0$ 时),故只要讨论

$$\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x$$

的敛散性.但当 $p>0, x\geqslant 2$ 时,

$$0\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^p(x^p+1)}-\frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}\right]=\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\leqslant\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\leqslant\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p-1)}\leqslant\frac{1}{x^p(x^p-1)}.$$

而易知 $\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}\mathrm{d}x$ 恒收敛(当 $p>0$ 时),积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(x^p+1)}$ 当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$时发散,积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(x^p-1)}$ 当$p>\frac{1}{2}$时收敛,故积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛,当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散.由此可知,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x$ $(p>0)$仅当 $p>\frac{1}{2}$时收敛.

利用与级数比较的方法研究下列积分的收敛性:

【3747】 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x.$

解 设 $a>0$.我们证明:对任何数列

$$0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots(a_n\to+\infty).$$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 都收敛.事实上,有

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x+a}\Big|_{a_n}^{a_{n+1}}+\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}\mathrm{d}x$$

故

$$\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x=\frac{\sin a_{m+p}}{a_{m+p}+a}-\frac{\sin a_m}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}\mathrm{d}x.$$

从而,

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+1}}\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2}$$

$$=\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\left(\frac{1}{a_m+a}-\frac{1}{a_{m+p}+a}\right)=\frac{2}{a_m+a},$$

由此可知,满足柯西收敛准则,从而,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 收敛.因此,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $a=0$，显然瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}dx$ 发散，故广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 发散.

下设 $a<0$. 若 $a=-(n+\frac{1}{2})\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}dx+\int_{(n+1)\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}dx+(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}}dt.$$

由上所证，右端第二个积分收敛；又由于

$$\lim_{x\to(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\cos x}{x+a}=(-1)^{n+1},$$

故右端第一个积分收敛（它不是广义积分，补充定义被积函数在 $x=(n+\frac{1}{2})\pi$ 时的值为 $(-1)^{n+1}$ 后即为连续函数的积分）；从而，此时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收敛.

若 $a<0$ 但 $a\neq-(n+\frac{1}{2})\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$，此时 $\cos(-a)\neq0$. 由连续性，可取 $\delta>0$，使当 $-a\leqslant x\leqslant -a+\delta$ 时 $\cos x$ 保持定号且 $|\cos x|\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|$. 于是，

$$\left|\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}dx\right|\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{dx}{x+a}=+\infty.$$

由此可知，瑕积分 $\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 发散. 从而，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 更是发散.

综上所述，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 仅当 $a>0$ 及 $a=-(n+\frac{1}{2})\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 时收敛.

【3748】 $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$ $(n>0)$.

解 由于被积函数非负，故只要考虑化为一种特殊的（正项）级数即可. 我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}.$$

又积分 $$0<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{k\pi\,dx}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x},$$

$$\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{(k-1)\pi\,dx}{1+[(k+1)\pi]^n\sin^2 x}<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{(k+1)\pi\,dx}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x},$$

且

$$\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}=\frac{-1}{\sqrt{1+a^2}}\arctan\left(\frac{\cot x}{\sqrt{1+a^2}}\right)\Bigg|_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}<\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}},$$

$$\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\arctan(\sqrt{1+a^2}\tan x)\Bigg|_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\arctan\sqrt{1+a^2}.$$

由于 $\frac{\pi}{4}<\arctan\sqrt{1+a^2}<\frac{\pi}{2}$，从而，

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}<\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}.$$

于是，
$$0<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}<\frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}},$$

$$\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}<\frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}.$$

由于当 $n>4$ 时,级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}\quad 及\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$$

收敛;而当 $n\leqslant 4$ 时,级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}$ 发散,故级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}$ 当 $n>4$ 时收敛,而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}$$

仅当 $n>4$ 时收敛.

因此,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}$ 仅当 $n>4$ 时收敛.

【3749】 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

解 由于被积函数非负,故只要考虑化为一种特殊的(正项)级数即可.我们有

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(x+n\pi)^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

于是,
$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p\pi^p}<\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}<\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\pi^p}.$$

易证积分 $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 收敛,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛;当 $p\leqslant 1$ 时发散.因此,原积分仅当 $p>1$ 时收敛.

【3750】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$.

解 我们有
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x.$$

易知右端第一个积分($x=0$ 可能是瑕点)当 $n<2$ 时收敛,当 $n\geqslant 2$ 时发散.下面研究右端第二个积分.先设 $n>-1$.对任何数列 $1=a_0<a_1<\cdots<a_k<\cdots\ (a_k\to+\infty)$,

$$\begin{aligned}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x&=-\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\mathrm{d}[\cos(x+x^2)]}{x^n(1+2x)}\\&=-\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\Bigg|_{a_k}^{a_{k+1}}-\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故
$$\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x=-\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\Bigg|_{a_m}^{a_{m+p}}-\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2}\mathrm{d}x,$$

从而,
$$\left|\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2a_m^{n+1}}+\frac{1}{2a_{m+p}^{n+1}}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}\mathrm{d}x.$$

易知积分
$$\int_1^{+\infty}\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}\mathrm{d}x$$

收敛(因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n+2}\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}=\frac{n+1}{2}>0,n+2>1$).由此可知,对任给的 $\varepsilon>0$,必存在 N,使当 $n>N$ 时,对 $p=1,2,3,\cdots$,均有

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

于是,根据柯西收敛准则,级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛,从而,积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

再设 $n\leqslant -1$.令 ξ_k 和 η_k 分别表方程 $x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ 和 $x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 的(唯一)正根,其中 $k=1,2,3,\cdots$;即令

$$\xi_k=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1),\quad \eta_k=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+2\pi}-1).$$

于是，$\eta_k>\xi_k\to+\infty\ (k\to\infty)$. 我们有(注意$-n\geqslant1$)

$$\int_{\xi_k}^{\eta_k}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx>\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\xi_k}^{\eta_k}x^{-n}dx\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\xi_k}^{\eta_k}x\,dx>\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_k(\eta_k-\xi_k)$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1}{\sqrt{1+8k\pi+2\pi}+\sqrt{1+8k\pi+\pi}}\to\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\quad(k\to\infty).$$

由此可知，此时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$发散.

综上所述，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$仅当$-1<n<2$时收敛.

【3751】 以肯定的方式陈述，什么是积分$\int_0^{+\infty}f(x,y)dx$在已知区间(y_1,y_2)内不一致收敛?

解 若对于某个正数ε_0，不论B取得多大，恒存在$b_0\geqslant B$以及$y_0\in(y_1,y_2)$(b_0与y_0都依赖于B)，使得

$$\left|\int_{b_0}^{+\infty}f(x,y_0)dx\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

则$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$在区间(y_1,y_2)内不一致收敛.

【3752】 证明：若(ⅰ)积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛；(ⅱ)函数$\varphi(x,y)$有界，且关于x是单调的，则积分$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,y)dx$一致收敛(在对应区域内).

证 设$|\varphi(x,y)|\leqslant L$，则由题设(ⅰ)知：对于任给的$\varepsilon>0$，总存在数$B=B(\varepsilon)$，使当$A'>A>B$时，就有不等式

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2L}.\tag{1}$$

由积分第二中值定理知：存在$\xi\in[A,A']$，使有下述等式

$$\int_A^{A'}f(x)\varphi(x,y)dx=\varphi(A+0,y)\cdot\int_A^{\xi}f(x)dx+\varphi(A'-0,y)\cdot\int_{\xi}^{A'}f(x)dx.\tag{2}$$

由(1)式，得
$$\left|\int_A^{\xi}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2L},\qquad\left|\int_{\xi}^{A'}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

于是，由(2)式，可得
$$\left|\int_A^{A'}f(x)\varphi(x,y)dx\right|<L\frac{\varepsilon}{2L}+L\frac{\varepsilon}{2L}=\varepsilon,$$

即积分$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,y)dx$在对应的$y$区域内一致收敛.

【3753】 证明：一致收敛的积分 $I=\int_1^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx\quad(0<y<1)$

不能以与参数无关的收敛积分为强函数.

证 任给$\varepsilon>0$. 取$A_0>1$充分大，使$\int_{A_0-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty}e^{-u^2}du<\varepsilon$.

下证：当$A>A_0$时，对一切$0<y<1$，均有

$$\int_A^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx<\varepsilon.$$

事实上，当$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\leqslant y<1$时，

$$\int_A^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx<\int_A^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx=\int_{A-\frac{1}{y}}^{+\infty}e^{-u^2}\leqslant\int_{A-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty}e^{-u^2}du<\int_{A_0-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty}e^{-u^2}du<\varepsilon;$$

当$0<y<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$时，

$$\int_A^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx<\int_1^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx=\int_1^{\frac{1}{y}}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx+\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{y}-1} e^{-\frac{1}{y^2}t^2}dt+\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}t^2}dt<2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}}dt=2y\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=2y\frac{\sqrt{\pi}}{2}<\varepsilon.$$

由此可知，积分 $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$ 在 $0<y<1$ 上一致收敛.

最后证明，不存在这样的函数 $\varphi(x)\ (x\geqslant1)$，使

$$0<e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\leqslant\varphi(x)\quad(x\geqslant1,\ 0<y<1)\tag{1}$$

并且 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛. 用反证法. 假定有这样的函数 $\varphi(x)$ 存在，则由 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$ 的收敛性可知，必存在点 $x_0>1$ 使 $\varphi(x_0)<1$. 于是，令 $y_0=\frac{1}{x_0}$，则 $0<y_0<1$ 且

$$e^{-\frac{1}{y_0^2}\left(x_0-\frac{1}{y_0}\right)^2}=1>\varphi(x_0),$$

此显然与(1)式矛盾. 由此可知，一致收敛的积分 I 的被积函数不能以与参数 y 无关的具收敛积分的函数为强函数. 证毕.

【3754】 证明：积分 $$I=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

(1) 在任何区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 内一致收敛；

(2) 在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 内非一致收敛.

证 显然，积分 I 对于每一个定值 $\alpha\geqslant0$ 是收敛的. 事实上，当 $\alpha=0$ 时，$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=0$；当 $\alpha>0$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=-e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

(1) 如果 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$，则由于 $0<\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=e^{-\alpha A}\leqslant e^{-aA}$，故对于任给的 $\varepsilon>0$，可以找到不依赖于 α 的数 $A_0=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$，使当 $A>A_0$ 时，就有 $\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx<e^{-aA_0}=\varepsilon$. 于是，在区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上积分 I 一致收敛.

(2) 如果 $0\leqslant\alpha\leqslant b$，则不存在这样的数 A_0. 事实上，取 $0<\varepsilon<1$ 就办不到. 由于当 $\alpha\to+0$ 时，$e^{-A\alpha}\to1$，故对于足够小的 α 值，$e^{-A\alpha}$ 就比任意一个小于 1 的数 ε 为大. 因此，在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 上，积分 I 对 α 的收敛是不一致的.

【3755】 证明：狄利克雷积分 $$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

(1) 在每一个不含数值 $\alpha=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛，

(2) 在含数值 $\alpha=0$ 的每一个闭区间 $[a,b]$ 上非一致收敛.

证 不失一般性，我们只考虑 α 的正值.

(1) 由于积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$ 是收敛的，故对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 A_0，使当 $A>A_0$ 时，恒有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\right|<\varepsilon.$$

当 $\alpha>0$ 时，由于 $\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz$，故取 $A>\frac{A_0}{a}$，对于 $\alpha\geqslant a>0$，就有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|<\varepsilon.$$

于是，在区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上，积分 I 是一致收敛的.

(2) 对于任何的 $A>0$，当 $\alpha\to+0$ 时，

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}.$$

因此，当 $\alpha>0$ 且充分小时，有 $$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx>\frac{\pi}{4}.$$

于是，在区间 $0\leqslant \alpha\leqslant b\ (b>0)$ 上，积分 I 不一致收敛.

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性：

【3756】 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x \quad (0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 由于当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$ 时，$|e^{-\alpha x}\sin x|\leqslant e^{-\alpha_0 x}$，且积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha_0}$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\sin x\mathrm{d}x$ 在区间 $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛.

【3757】 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\mathrm{d}x \quad (a\leqslant\alpha\leqslant b)$.

解 当 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ 且 $x\geqslant1$ 时，$0<x^{\alpha}e^{-x}\leqslant x^{b}e^{-x}$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2\cdot x^b e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{b+2}}{e^x}=0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛，从而，积分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\mathrm{d}x$ 在区间$a\leqslant\alpha\leqslant b$上一致收敛.

【3758】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad (-\infty<\alpha<+\infty)$.

解 由于 $\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\pi$ 收敛，故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上一致收敛.

【3759】 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+\alpha)^2+1} \quad (0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 由于 $0<\frac{1}{(x+\alpha)^2+1}\leqslant\frac{1}{1+x^2}\ (0\leqslant\alpha\leqslant+\infty)$，且积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+\alpha)^2+1}$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛.

【3760】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x \quad (0\leqslant\alpha<+\infty)$

提示 注意 $x=0$ 不是瑕点. 利用狄利克雷判别法或柯西准则.

解 首先注意，因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}e^{\alpha x}=1$. 故 $x=0$ 不是瑕点.

证法 1：

由于 $\left|\int_0^A \sin x\mathrm{d}x\right|=|1-\cos A|\leqslant2$，而当 $0\leqslant\alpha<+\infty$时，函数$\frac{e^{-\alpha x}}{x}$在 $x>0$ 关于 x 递减，并且当 $x\to+\infty$ 时它关于$\alpha(0\leqslant\alpha<+\infty)$一致趋于零(因为 $0\leqslant\alpha<+\infty, x>0$ 时，$0<\frac{e^{-\alpha x}}{x}\leqslant\frac{1}{x}$)，故由狄利克雷判别法知，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 在$0\leqslant\alpha<+\infty$上一致收敛.

证法 2：

由积分学第二中值定理知：当 $A'>A>0$ 时，

$$\left|\int_A^{A'}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{A}\int_A^{\xi}e^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x\right|,$$

其中 $A\leqslant\xi\leqslant A'$. 我们知道 $e^{-\alpha x}\sin x$ 的原函数是

$$F_{\alpha}(x)=-\frac{\alpha\sin x+\cos x}{1+\alpha^2}e^{-\alpha x},$$

显然，当 $\alpha\geqslant0, x>0$ 时，

$$|F_{\alpha}(x)|\leqslant\frac{\alpha+1}{1+\alpha^2}\leqslant\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{1}{1+\alpha^2}<2,$$

故当 $A'>A>0, 0\leqslant\alpha<+\infty$，时

$$\left|\int_A^{A'}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{A}[F_{\alpha}(\xi)-F_{\alpha}(A)]\right|<\frac{4}{A}.$$

由此，利用一致收敛的柯西收敛准则，即知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx$$

在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛. 证毕.

【3761】 $\int_1^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx$ $(0\leqslant\alpha<+\infty)$ 其中 $p>0$ 是常数.

提示 利用狄利克雷判别法或柯西准则.

解 由于

$$\left|\int_1^A\cos x dx\right|=|\sin A-\sin 1|\leqslant 2,$$

而当 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 时, 函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x^p}$ 在 $x\geqslant 1$ 关于 x 递减且当 $x\to+\infty$ 时关于 $\alpha(0\leqslant\alpha<+\infty)$ 一致趋于零(因为 $0\leqslant\alpha<+\infty, x\geqslant 1$ 时, $0<\frac{e^{-\alpha x}}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$), 故由狄利克雷判别法即知, $\int_1^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛.

注意, 也可仿 3760 题证法 2, 利用积分学第二中值定理来证明.

【3762】 $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx$ $(0\leqslant\alpha<+\infty)$.

提示 注意此积分是收敛的而不一致收敛.

解 此积分是收敛的. 事实上, 当 $\alpha=0$ 时, 积分为零; 当 $\alpha>0$ 时, 设 $\sqrt{\alpha}x=t$, 则得

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是, 此积分却不一致收敛. 事实上, 对于任何的 $A>0$, 由于

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_{\sqrt{\alpha}A}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故对于 $0<\varepsilon_0<\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 必存在 $\alpha_0>0$, 使有

$$\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha_0}e^{-\alpha_0 x^2}dx>\varepsilon_0,$$

即此积分不是一致收敛的.

【3763】 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$, (1) $a<\alpha<b$; (2) $-\infty<\alpha<+\infty$.

解 显然, 对任何固定的 α, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 都收敛, 并且(作代换 $x-\alpha=t$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

(1) 取正数 R 充分大, 使 $-R<a<b<R$. 显然, 当 $|x|\geqslant R$ 时, 对一切 $a<\alpha<b$, 有

$$0<e^{-(x-\alpha)^2}<e^{-(|x|-R)^2},$$

显然积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(|x|-R)^2}dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-R)^2}dx$ 收敛, 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 对 $a<\alpha<b$ 一致收敛.

(2) 对任何 $A>0$, 有

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{A-\alpha}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi},$$

故当 α 充分大时, $\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx>\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; 由此可知 $\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上不是一致收敛的, 当然 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上更非一致收敛.

【3764】 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x dy$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 此积分对任一个固定的 x 值, 显然是收敛的, 且当 $x>0$ 时,

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x dy=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是，它对$-\infty<x<+\infty$却不是一致收敛的．事实上，对于任何的$A>0$，当$x>0$时，

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin x \mathrm{d}y=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\int_{Ax}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\to\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ (x\to+0),$$

由此可知积分不一致收敛．

【3765】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^p}\mathrm{d}x\quad(p\geqslant0)$.

解 由 2380 题易知，积分$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$收敛，又$\frac{1}{1+x^p}$ $(p\geqslant0)$在$x\geqslant0$上对x单调递减且一致有界：

$$0<\frac{1}{1+x^p}\leqslant1\quad(p\geqslant0,x\geqslant0),$$

故由阿贝尔判别法知，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^p}\mathrm{d}x$对$p\geqslant0$一致收敛．

【3766】 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，(1)$p\geqslant p_0>0$；(2)$p>0$ $(q>-1)$.

解 注意到$x=0$和$x=1$都可能是瑕点．作代换$x=e^{-t}$，得

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_{+\infty}^0 e^{-(p-1)t}t^q e^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^q\mathrm{d}t,$$

右端的积分当$p>0(q>-1)$时是收敛的*），从而，左端的积分此时也收敛．更由于($\varepsilon,\varepsilon'>0$很小)

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon'} x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{\ln\frac{1}{1-\varepsilon'}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}} e^{-pt}t^q\mathrm{d}t,$$

故$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x$的一致收敛性等价于$\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^q\mathrm{d}t$的一致收敛性．

(1) 当$p\geqslant p_0>0$时，由于

$$0<e^{-pt}t^q\leqslant e^{-p_0t}t^q\quad(0<t<+\infty)$$

而积分$\int_0^{+\infty} e^{-p_0t}t^q$收敛，故积分$\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^q\mathrm{d}t$一致收敛（对于$p\geqslant p_0>0$）．从而，原积分$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x$当$p\geqslant p_0>0$时一致收敛．

(2) 对任何$A>0$，$p>0$，作代换$pt=s$，则

$$\int_A^{+\infty} e^{-pt}t^q\mathrm{d}t=\frac{1}{p^{q+1}}\int_{pA}^{+\infty} s^q e^{-s}\mathrm{d}s,$$

由于$q>-1$，故积分$\int_0^{+\infty} s^q e^{-s}\mathrm{d}s$收敛，且显然

$$0<\int_0^{+\infty} s^q e^{-s}\mathrm{d}s<+\infty,$$

于是，有

$$\lim_{p\to+0}\int_A^{+\infty} e^{-pt}t^q\mathrm{d}t=+\infty,$$

由此即知，积分$\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^q\mathrm{d}t$在$p>0$上非一致收敛．从而，原积分$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x$当$p>0$时非一致收敛．

*） 利用 2361 题的结果（在其中作代换$pt=s$）．

【3767】 $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\quad(0\leqslant n<+\infty)$.

解 注意，$x=1$是瑕点．由于当$0\leqslant x<1$时，有

$$0\leqslant\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0\leqslant n<+\infty),$$

而积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$收敛，故由魏尔斯特拉斯准则知，积分$\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$当$0\leqslant n<+\infty$时一致收敛．

【3768】 $\int_0^1\sin\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{x^n}\quad(0<n<2)$.

解 作代换$\frac{1}{x}=t$，则

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{x^n}=\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t,$$

并且，很明显，$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{x^n}$的一致收敛相当于$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t$的一致收敛. 显然，当$n<2$时，积分$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\cdot\sin t\mathrm{d}t$是收敛的. 下证：当$0<n<2$时，它不一致收敛. 事实上，当$0<n<2$时，对任何正整数$m$，有

$$\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t>\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2-n}}>\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\pi}{4}\ \frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}.$$

由于$\lim\limits_{n\to2-0}\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}=1$，故当$n$在$0<n<2$内且与2充分接近时，必有$\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}>\frac{1}{2}$. 于是，这时

$$\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t>\frac{\sqrt{2}\pi}{16}=\text{常数}>0,$$

故$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t$在$0<n<2$上非一致收敛.

【3769】 $\int_0^2\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\quad\left(|\alpha|<\frac{1}{2}\right).$

解 首先注意$x=1$，$x=2$是瑕点；$x=0$可能是瑕点. 将积分分成在$(0,1)$及$(1,2)$上两个积分.

当$0<x<1$且$|\alpha|<\frac{1}{2}$时，$\left|\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right|<\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}$；

当$1<x<2$且$|\alpha|<\frac{1}{2}$时，$\left|\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right|<\frac{\sqrt{2}}{(1-x)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}$.

易知上述两个不等式右端的函数分别在区间$(0,1)$及$(1,2)$上的积分收敛，故由魏尔斯特拉斯准则知，积分$\int_0^2\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\mathrm{d}x$对$|\alpha|<\frac{1}{2}$一致收敛.

【3770】 $\int_0^1\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\mathrm{d}x\quad(0\leqslant\alpha\leqslant1).$

解 $\int_0^1\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\mathrm{d}x=\int_0^\alpha\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x+\int_\alpha^1\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\mathrm{d}x.$

对于积分$\int_0^\alpha\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x$，由于

$$\left|\int_{\alpha-\eta}^\alpha\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\alpha-\eta}^\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}=2\sqrt{\eta},$$

故对于任给的$\varepsilon>0$，只要取$0<\eta<\frac{\varepsilon^2}{4}$，即有

$$\left|\int_{\alpha-\eta}^\alpha\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

因此，对$0\leqslant\alpha\leqslant1$它是一致收敛的.

对于积分$\int_\alpha^1\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\mathrm{d}x$，由于

$$\left|\int_\alpha^{\alpha+\eta}\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_\alpha^{\alpha+\eta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-\alpha}}=2\sqrt{\eta},$$

故对于任给的$\varepsilon>0$，只要取$0<\eta<\frac{\varepsilon^2}{4}$，即有

$$\left|\int_{\alpha}^{\alpha+\eta}\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

因此，对 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 它是一致收敛的.

于是，积分 $\int_0^1\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\mathrm{d}x$ 对 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 一致收敛.

【3771】 若积分在参数的已知值的某邻域内一致收敛，则称此积分对参数的已知值一致收敛.

证明：积分
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}$$
对每一个 $\alpha\neq0$ 的值一致收敛，而对 $\alpha=0$ 非一致收敛.

证 设 α_0 为任一不为零的数，不妨设 $\alpha_0>0$. 今取 $\delta>0$，使 $\alpha_0-\delta>0$. 下面证明积分 I 在 $(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)$ 内一致收敛. 事实上，当 $\alpha\in(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)$ 时，由于

$$0<\frac{\alpha}{1+\alpha^2x^2}<\frac{\alpha_0+\delta}{1+(\alpha_0-\delta^2)x^2},$$

且积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\alpha_0+\delta}{1+(\alpha_0-\delta)^2x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，故由魏尔斯特拉斯准则知，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}$ 在 $(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)$ 内一致收敛，从而，在 α_0 点一致收敛. 由 α_0 的任意性知，积分 I 在每一个 $\alpha\neq0$ 的值一致收敛.

其次，我们证明积分 I 对 $\alpha=0$ 非一致收敛. 事实上，对原点的任何邻域 $(-\delta,\delta)$ 均有下述结果：

对任何的 $A>0$，有
$$\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}=\int_{\alpha A}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\quad(\alpha>0).$$

由于
$$\lim_{\alpha\to+0}\int_{\alpha A}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2},$$

故取 $0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{2}$，在 $(-\delta,\delta)$ 中必存在某一个 $\alpha_0>0$，使有

$$\left|\int_{\alpha_0A}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right|>\varepsilon_0\quad 即\quad\left|\int_A^{+\infty}\frac{\alpha_0\mathrm{d}x}{1+\alpha_0^2x^2}\right|>\varepsilon_0.$$

因此，积分 I 对 $\alpha=0$ 点的任一邻域 $(-\delta,\delta)$ 内非一致收敛，从而，积分 I 在 $\alpha=0$ 时非一致收敛.

【3772】 在下式中
$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$$
把极限移到积分号内合理吗？

解题思路 不合理. 这是因为积分 $\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 对 $0\leqslant\alpha\leqslant b\ (b>0)$ 不一致收敛(3754 题(2)的结果)，故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理. 对于本题，实际上也不能交换.

解 不合理. 事实上，由 3754 题(2)的结果知，积分 $\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 对 $0\leqslant\alpha\leqslant b\ (b>0)$ 的收敛并非一致，故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理. 对于本题，实际上也不能交换，这是由于

$$\int_0^{+\infty}\left(\lim_{\alpha\to+0}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\right)\mathrm{d}x=0,$$

而
$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to+0}\left(-\mathrm{e}^{-\alpha x}\right)\Big|_0^{+\infty}=1,$$

故得
$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\neq\int_0^{+\infty}\left(\lim_{\alpha\to+0}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\right)\mathrm{d}x.$$

【3773】 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可积分，证明公式：

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

证 容许有有限个瑕点. 为叙述简单起见，例如，设只有一个瑕点 $x=0$. 已知积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且被积函数中不含有 α，故它关于 α 一致收敛. 又因函数 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 对于固定的 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，关于 $x(x>0)$ 是递减的，并且一致有界：$0<\mathrm{e}^{-\alpha x}\leqslant1(0\leqslant\alpha\leqslant1,x>0)$，故根据阿贝尔判别法知，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 上一致收

敛. 于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，可取 $\eta>0, A_0>0$ ($\eta<A_0$)，使

$$\left|\int_0^{\eta} e^{-\alpha x} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{5},\qquad \left|\int_{A_0}^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{5}\quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[\eta,A_0]$ 上常义可积，故有界，即存在常数 M_0 使 $|f(x)|\leqslant M_0$ ($\eta\leqslant x\leqslant A_0$). 再根据二元函数 $e^{-\alpha x}$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，$\eta\leqslant x\leqslant A_0$ 上的一致连续性知，必存在 $\delta>0$ ($\delta<1$)，使当 $0<\alpha<\delta$ 时，对一切 $\eta\leqslant x\leqslant A_0$，皆有 $0\leqslant 1-e^{-\alpha x}<\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}$. 于是，当 $0<\alpha<\delta$ 时，恒有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx-\int_0^{+\infty} f(x)\,dx\right|\\ =&\left|\int_{\eta}^{A_0}(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx+\int_{A_0}^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)\,dx-\int_{A_0}^{+\infty} f(x)\,dx+\int_0^{\eta} e^{-\alpha x}f(x)\,dx-\int_0^{\eta} f(x)\,dx\right|\\ <&M_0A_0\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此可知，
$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

【3774】 若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内绝对可积，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

证 由 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的绝对可积性可知：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使有

$$\int_A^{+\infty}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，
$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right|\leqslant\left|\int_0^{A} f(x)\sin nx\,dx\right|+\frac{\varepsilon}{3}.$$

先设 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 中无瑕点. 我们在 $[0,A]$ 中插入分点 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}<t_m=A$，并设 $f(x)$ 在 $[t_{k-1},t_k]$ 上的下确界为 m_k，则有

$$\int_0^A f(x)\sin nx\,dx=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\sin nx\,dx=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k}[f(x)-m_k]\sin nx\,dx+\sum_{k=1}^m m_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sin nx\,dx,$$

从而有

$$\left|\int_0^A f(x)\sin nx\,dx\right|\leqslant\sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k+\sum_{k=1}^m|m_k|\frac{|\cos nt_{k-1}-\cos nt_k|}{n}\leqslant\sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^m|m_k|,$$

其中 w_k 为 $f(x)$ 在区间 $[t_{k-1},t_k]$ 上的振幅，$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

由于 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上可积，故可取某一分法，使有

$$\left|\sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这样固定的分法，$\sum_{k=1}^m|m_k|$ 为一定值，因而存在 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^m|m_k|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，对于上述所选取的 N，当 $n>N$ 时，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right|&\leqslant\left|\int_0^{A} f(x)\sin nx\,dx\right|+\left|\int_A^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right|\\ &\leqslant\sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^m|m_k|+\int_A^{+\infty}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

其次，设 $f(x)$ 在区间 $[0,A]$ 中有瑕点. 为简便起见，不妨设只有一个瑕点，且为 0. 于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使有

$$\int_0^{\eta}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

但是，$f(x)$在$[\eta,A]$上无瑕点，故应用上述结果可知：存在 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{0}^{\eta}|f(x)|\mathrm{d}x+\left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|+\int_{A}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

总之，当 $f(x)$在$(0,+\infty)$内绝对可积，不论 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有无瑕点，均可证得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

【3775】 证明：若(1)在每一个有限区间(a,b)内 $f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)$；(2) $|f(x,y)|\leqslant F(x)$，其中 $\int_{a}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<+\infty$，则

$$\lim_{y\to y_0}\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

证 条件(1)表示当 $y\to y_0$ 时，当 x 在任何有限区间(a,b)上，$f(x,y)$都一致趋于 $f(x,y_0)$. 于是，有

$$\lim_{y\to y_0}\int_{a}^{b} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} f(x,y_0)\mathrm{d}x\quad（对任何 b>a）.$$

又在不等式$|f(x,y)|\leqslant F(x)$中令 $y\to y_0$（任意固定 x），得$|f(x,y_0)|\leqslant F(x)$，故 $\int_{a}^{+\infty} f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 收敛.

任给 $\varepsilon>0$. 由于 $\int_{a}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<+\infty$，故可取定某$b>a$，使 $\int_{b}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$. 对此 b，又可取 $\delta>0$，使当 $0<|y-y_0|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\int_{a}^{b} f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{a}^{b} f(x,y_0)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $0<|y-y_0|<\delta$ 时，恒有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{a}^{+\infty} f(x,y_0)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\int_{a}^{b} f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{a}^{b} f(x,y_0)\mathrm{d}x\right|+\int_{b}^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x+\int_{b}^{+\infty}|f(x,y_0)|\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\int_{b}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x+\int_{b}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此可知，

$$\lim_{y\to y_0}\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty} f(x,y_0)\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

证毕.

注 本题中应假定：对任何 $b>a$，$f(x,y)$关于 x 在$[a,b]$上可积.

【3776】 利用积分符号与极限号互换，计算积分

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]\mathrm{d}x.$$

解 先证积分符号与极限号能互换. 事实上，(1)函数$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$在 $0\leqslant x\leqslant A$ 上连续（任何 $A>0$），故它在$[0,A]$上可积；(2)又$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$在$[0,A]$上关于 n 为单调减小的，且$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}=\mathrm{e}^{-x^2}$为连续函数，故按狄尼定理，当 $n\to\infty$时，函数$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$在$[0,A]$上一致趋向于 e^{-x^2}；(3)由于 $0<\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$ $(n=1,2,\cdots)$，且$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}<+\infty$，故积分$\int_{0}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x$ 关于n 一致收敛. 因此，我们可以应用积分符号与极限号的互换定理*)，从而，得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

而
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}=\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}=\sqrt{n}I_n,$$

又由于

$$I_{n-1}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}=\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\Bigg|_0^{+\infty}+2(n-1)\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^n}dt=2(n-1)I_{n-1}-2(n-1)I_n,$$

故得
$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

又因 $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$，将上式递推即得

$$I_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$

于是，
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi\sqrt{n}}{2}.$$

根据沃利斯公式，我们有

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n-2)!!]^2}{(2n-1)[(2n-3)!!]^2}.$$

最后得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!\sqrt{n}}{(2n-2)!!}=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!\sqrt{2n-1}}{(2n-2)!!}\sqrt{\frac{n}{2n-1}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*） 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷 480 目定理 I.

【3777】 证明：积分
$$F(a)=\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\,dx$$
是参数 a 的连续函数.

证 $F(a)=\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx=\int_{-a}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_{-a}^{0} e^{-x^2}dx+\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^{a} e^{-x^2}dx+\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

由变上限积分的性质知，积分 $\int_0^a e^{-x^2}dx$ 是 $a(-\infty<a<+\infty)$ 的连续函数，故 $F(a)$ 也是 $a(-\infty<a<+\infty)$ 的连续函数.

【3778】 求函数
$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}dx$$
的不连续点. 作出函数 $y=F(a)$ 的图像.

提示 注意当 $|a|<1$ 时，$F(a)=\frac{\pi}{2}$；当 $|a|>1$ 时，$F(a)=-\frac{\pi}{2}$；当 $|a|=1$ 时，$F(a)=0$.

解 当 $1-a^2>0$ 即 $|a|<1$ 时，

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{(1-a^2)x}d[(1-a^2)x]=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

当 $1-a^2<0$ 即 $|a|>1$ 时，

$$F(a)=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a^2-1)x}{(a^2-1)x}d[(a^2-1)x]=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=-\frac{\pi}{2}.$$

当 $1-a^2=0$ 即 $|a|=1$ 时，$F(a)=0$.

于是，$a=\pm 1$ 为 $F(a)$ 不连续点. 如图 7.2 所示

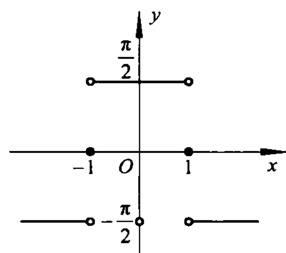


图 7.2

研究下列函数在所指定区间内的连续性：

【3779】 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$， 当 $\alpha>2$.

解 对于积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$. 由于当 $x\geqslant1$ 时，

$$0<\frac{x}{2+x^\alpha}<\frac{x}{x^\alpha}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0-1}},$$

其中 $\alpha\geqslant\alpha_0>2$，且积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha_0-1}}$ 收敛，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$ 对 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 一致收敛，从而，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$ 对 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 一致收敛. 因此，$F(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时连续. 由于 $\alpha_0>2$ 的任意性，故知 $F(\alpha)$ 当 $\alpha>2$ 时连续.

【3780】 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$， 当 $\alpha>0$.

解题思路 由狄利克雷判别法易知，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 对 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 一致收敛. 从而，函数 $F(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时连续. 由 $\alpha_0>0$ 的任意性即知，$F(\alpha)$ 当 $\alpha>0$ 时连续.

解 对于任何 $A>1$，均有 $$\left|\int_1^A\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant2.$$

而函数 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $x\geqslant1,\alpha>0$ 关于 x 单调递减，且由

$$0<\frac{1}{x^\alpha}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0}}\quad(x\geqslant1,\alpha\geqslant\alpha_0>0)$$

知：当 $x\to+\infty$ 时 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致趋于零. 因此，由狄利克雷判别法知，积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

对 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 一致收敛. 于是，函数 $F(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时连续. 由 $\alpha_0>0$ 的任意性，故知 $F(\alpha)$ 当 $\alpha>0$ 时连续.

【3781】 $F(\alpha)=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x$， 当 $0<\alpha<2$.

解 $$F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin(\pi-t)}{(\pi-t)^\alpha t^\alpha}\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x.$$

由于当 $0<\eta<1$，$0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1<2$ 时，有

$$\int_0^\eta\frac{|\sin x|}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha-1}}\leqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0}\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha_1-1}}=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\alpha_0}\frac{1}{2-\alpha_1}\eta^{2-\alpha_1},$$

故对于任给的 $\varepsilon>0$，当

$$0<\eta<\delta=\min\left\{1,(2-\alpha_1)^{\frac{1}{2-\alpha_1}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\alpha_0}{2-\alpha_1}}\varepsilon^{\frac{1}{2-\alpha_1}}\right\}$$

时，对一切 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 皆有

$$\left|\int_0^\eta\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^\eta\frac{|\sin x|}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

因此，瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时一致收敛. 从而，$F(\alpha)$ 在 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 上连续. 由 $0<\alpha_0<\alpha_1<2$ 的任意性知，$F(\alpha)$ 当 $0<\alpha<2$ 时连续.

【3782】 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\mathrm{d}x$， 当 $0<\alpha<1$.

解 $$F(\alpha)=\sum_{n=0}^\infty\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^\infty\int_0^\pi\frac{\mathrm{e}^{-(n\pi+t)}}{\sin^\alpha t}\mathrm{d}t.$$

当 $0<\alpha\leqslant\alpha_0<1$ 时，

$$\int_0^{\pi}\frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^{\alpha}t}dt\leqslant e^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin^{\alpha_0}t}dt.$$

显然，积分

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sin^{\alpha_0}t}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin^{\alpha_0}t},$$

且 $\lim\limits_{t\to+0}t^{\alpha_0}\frac{1}{\sin^{\alpha_0}t}=1$，故它是收敛的. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n\pi}$ 为公比等于 $e^{-\pi}<1$ 的几何级数，它也收敛. 于是，由魏尔斯特拉斯准则知，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^{\alpha}t}dt.$$

对 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 一致收敛. 从而，注意到被积函数是正的，即知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx$$

对 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 一致收敛. 因此，$F(\alpha)$ 在 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 上连续. 由 $\alpha_0<1$ 的任意性知，$F(\alpha)$ 当 $0<\alpha<1$ 时连续.

【3783】 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^2}dx$，当 $-\infty<\alpha<+\infty$.

提示 注意当 $\alpha\neq0$ 时，$F(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$；当 $\alpha=0$ 时，$F(\alpha)=0$.

解 当 $\alpha\neq0$ 时，$F(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}e^{-x\alpha^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha}$，显然它是连续的.

当 $\alpha=0$ 时，$F(0)=\int_0^{+\infty}0\cdot e^{-0}dx=0$. 于是，显见 $F(\alpha)$ 当 $\alpha=0$ 时不连续.

§3. 广义积分号下的微分法和积分法

1° **对参数的微分法** 若 1)函数 $f(x,y)$ 及其导数 $f'_y(x,g)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty$，$y_1<y<y_2$ 内是连续的；2) $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 收敛；3) $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$ 在区间 (y_1,y_2) 内一致收敛，则当 $y_1<y<y_2$ 时

$$\frac{d}{dy}\int_a^{-\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$$

(莱布尼茨法则).

2° **对参数积分的公式** 若 1)函数 $f(x,y)$ 当 $x\geqslant a$ 及 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 时是连续的；2) $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在有限区间 (y_1,y_2) 内一致收敛，则

$$\int_{y_1}^{y_2}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}dx\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dy. \tag{1}$$

若 $f(x,y)\geqslant0$，同时假定等式(1)中两个内侧的积分连续，并且等式(1)的一端有意义，则公式(1)对于无穷区间 (y_1,y_2) 也正确.

【3784】 利用公式

$$\int_0^1x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\quad(n>0),$$

计算积分

$$I=\int_0^1x^{n-1}\ln^m x\,dx,\quad 其中\ m\ 为正整数.$$

解题思路 首先，注意当 $0<x\leqslant1$，$n\geqslant n_0>0$ 时，$|x^{n-1}\ln x|\leqslant-x^{n_0-1}\ln x$，利用 2362 题的结果及魏尔斯特拉斯准则，可知积分 $\int_0^1\frac{dx^{n-1}}{dn}dx=\int_0^1x^{n-1}\ln x\,dx$ 对 $n\geqslant n_0>0$ 一致收敛，

从而，$\frac{d}{dn}\int_0^1x^{n-1}dx=\int_0^1x^{n-1}\ln x\,dx$ 对 $n\geqslant n_0$ 成立. 由 $n_0>0$ 的任意性可知，上式对任意 $n>0$ 均成立.

其次，利用数学归纳法，可得 $\frac{d^m}{dn^m}\int_0^1x^{n-1}dx=\int_0^1x^{n-1}\ln^m x\,dx$.

最后，可得 $\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$.

解 $\frac{dx^{n-1}}{dn}=x^{n-1}\ln x$ ($n>0$ 为任意实数). 积分

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx \tag{1}$$

对于 $n\geqslant n_0>0$ 为一致收敛. 事实上，当 $0<x\leqslant 1, n\geqslant n_0>0$ 时，

$$|x^{n-1}\ln x|\leqslant -x^{n_0-1}\ln x,$$

而积分 $\int_0^1 x^{n_0-1}\ln x\,dx$ 显然收敛*). 因此，由魏尔斯特拉斯准则即知，积分(1)对 $n\geqslant n_0>0$ 一致收敛. 于是，积分

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx$$

对参数 $n\geqslant n_0$ 求导数时，积分号与导数符号可交换，即

$$\frac{d}{dn}\int_0^1 x^{n-1}\,dx=\int_0^1\frac{dx^{n-1}}{dn}\,dx=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx.$$

由 $n_0>0$ 的任意性知，上式对任意 $n>0$ 均成立.

同理对 n 逐次求导数，也可在积分号下求导数，即

$$\frac{d^2}{dn^2}\int_0^1 x^{n-1}\,dx=\int_0^1\frac{d}{dn}(x^{n-1}\ln x)\,dx=\int_0^1 x^{n-1}\ln^2 x\,dx$$

$$\vdots$$

由数学归纳法，可得 $$\frac{d^m}{dn^m}\int_0^1 x^{n-1}\,dx=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx.$$

但是，$\int_0^1 x^{n-1}\,dx=\frac{1}{n}$ ($n>0$)，故有

$$\frac{d^m}{dx^m}\int_0^1 x^{n-1}\,dx=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

从而得 $\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$.

*) 利用 2362 题的结果.

【3785】 利用公式 $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\quad(a>0),$$

计算积分 $$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}},\quad 其中 n 为正整数.$$

解题思路 注意 $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)=-\frac{1}{(x^2+a)^2}$，又当 $x\geqslant 0, a\geqslant a_0>0$ 时，

$$\frac{1}{(x^2+a)^2}\leqslant\frac{1}{(x^2+a_0)^2},$$

及积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a_0)^2}$ 收敛，由魏尔斯特拉斯准则可知，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}$ 当 $a\geqslant a_0>0$ 时一致收敛. 于是，

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}.$$

由 $a_0>0$ 的任意性可知，上式对任意 $a>0$ 均成立.

利用数学归纳法，可得 $$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}.$$

同样，利用数学归纳法，可得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d^n}{da^n}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)=\frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}}(-1)^n a^{-(n+\frac{1}{2})},$$

最后得 $I=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-(n+\frac{1}{2})}$.

解 $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)=-\frac{1}{(x^2+a)^2}$. 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2} \tag{1}$$

对 $a\geqslant a_0>0$ 一致收敛. 事实上,当 $x\geqslant 0, a\geqslant a_0>0$ 时,

$$\frac{1}{(x^2+a)^2}\leqslant\frac{1}{(x^2+a_0)^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a_0)^2}$ 显然收敛. 因此,由魏尔斯特拉斯准则知,积分(1)当 $a\geqslant a_0>0$ 时一致收敛. 于是,利用莱布尼茨法则,即得

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}.$$

由 $a_0>0$ 的任意性知,上式对一切 $a>0$ 均成立.

同理对积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ 逐次求导数,得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}.$$

但是,

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)=-\frac{\pi}{2^2}\frac{1}{\sqrt{a^3}},$$

$$\frac{d^2}{da^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}\left(-\frac{\pi}{2^2}\frac{1}{\sqrt{a^3}}\right)=\frac{1\cdot 3\pi}{2^3}\frac{1}{\sqrt{a^5}},$$

$$\vdots$$

由数学归纳法,可得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}}(-1)^n a^{-(n+\frac{1}{2})},$$

最后得 $I=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-(n+\frac{1}{2})}$.

【3786】 证明:狄利克雷积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$

当 $\alpha\neq 0$ 时有导数,但不能用莱布尼茨法则来求它.

提示 令 $\alpha x=y$.

证 当 $\alpha>0$ 时,令 $\alpha x=y$,得

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}.$$

当 $\alpha<0$ 时,$I(\alpha)=-I(-\alpha)=-\frac{\pi}{2}$. 于是,当 $\alpha\neq 0$ 时,$I'(\alpha)=0$.

但是,如果利用莱布尼茨法则来求,即得错误的结果. 事实上,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x dx$$

发散,而 $I'(\alpha)=0\ (\alpha\neq 0)$ 存在,因此,本题不能应用莱布尼茨法则求 $I'(\alpha)$.

【3787】 证明:函数 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$

在区域 $-\infty<\alpha<+\infty$ 内连续并且可微.

证 设 α_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点. 记 $M=\max(|\alpha_0-1|,|\alpha_0+1|)$,则当 $x>M, \alpha\in(\alpha_0-1,\alpha_0+1)$ 时,恒有

$$\left|\frac{\cos x}{1+(x-\alpha)^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+(x-M)^2},\qquad \left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\right|=\left|\frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\right|\leqslant\frac{2}{1+(x-M)^2}.$$

由于积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x-M)^2}$ 收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\mathrm{d}x$$

在 (α_0-1,α_0+1) 内一致收敛. 从而，$F(\alpha)$ 在 (α_0-1,α_0+1) 内连续且可微，且可在积分号下求导数. 由 α_0 的任意性知，$F(\alpha)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且可微.

【3788】 从等式

$$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$$

出发，计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x \quad (a>0,b>0).$$

解 不妨设 $a<b$，注意到 e^{-xy} 在区域：$x\geqslant 0, a\leqslant y\leqslant b$ 上连续. 又积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$ 对 $a\leqslant y\leqslant b$ 是一致收敛的. 事实上，当 $x\geqslant 0, a\leqslant y\leqslant b$，时，$0<\mathrm{e}^{-xy}\leqslant \mathrm{e}^{-ax}$，但积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛. 故积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$ 是一致收敛的. 于是，利用对参数的积分公式，即得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x.$$

上式左端为 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{bx}}{x}\mathrm{d}x$，右端为 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln\frac{b}{a}$. 从而得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a} \quad (a>0,b>0).$$

【3789】 证明：傅茹兰公式：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a} \quad (a>0,b>0),$$

式中 $f(x)$ 为连续函数，积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 对任何的 $A>0$ 都有意义.

证 对任何的 $A>0$，有

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_A^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{Aa}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{Ab}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=f(\xi)\int_{Aa}^{Ab}\frac{\mathrm{d}t}{t}=f(\xi)\ln\frac{b}{a} \quad (Aa<\xi<Ab).$$

当 $A\to+0$ 时，$\xi\to+0$. 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

利用傅茹兰公式，计算积分：

【3790】 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x \quad (a>0,b>0).$

解 由于 $\cos x$ 在 $[0,+\infty]$ 内连续，且对任何 $A>0$，积分 $\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 存在，故由傅茹兰公式，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x=\cos 0\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}.$$

【3791】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}\mathrm{d}x \quad (a>0,b>0).$

提示 仿 3790 题的解法.

解 同 3790 题，由于 $\sin 0=0$，故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}\mathrm{d}x=0.$

【3792】 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x \quad (a>0,b>0).$

解 令 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x$，则 $f(x)$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上连续.

由于 $f(x)>0$ 且(利用洛必达法则)

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1,$$

故对任何 $A>0$,积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 都收敛.因此,由傅茹兰公式,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan ax\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan bx\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a},$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

利用对参数的微分法计算下列积分:

【3793】 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x\quad(\alpha>0,\beta>0).$

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{-2\alpha xe^{-\alpha x^2}+2\beta xe^{-\beta x^2}}{1}=0,$$

故 $x=0$ 不是瑕点.又由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\alpha x^2}}-\frac{x}{e^{\beta x^2}}\right)=0,$$

故对任何 $\alpha>0,\beta>0$ 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x$ 都收敛.今将 $\beta>0$ 固定,而把所求积分视为含参变量 $\alpha(\alpha>0)$ 的积分,即令

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x\quad(\alpha>0).$$

而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x.$$

下证右端积分在 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛.事实上,当 $\alpha\geqslant\alpha_0$,$0\leqslant x<+\infty$ 时,$0\leqslant xe^{-\alpha x^2}\leqslant xe^{-\alpha_0x^2}$,而积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha_0x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha_0}$ 收敛,故积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛.因此,当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时,可在积分号下对参数求导数:

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知,上式对一切 $\alpha>0$ 皆成立.积分之,得

$$I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+C\quad(0<\alpha<+\infty),$$

其中 C 为待定的常数.在此式中令 $\alpha=\beta$,并注意到

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x=0,$$

即得 $0=I(\beta)=-\frac{1}{2}\ln\beta+C$,由此知 $C=\frac{1}{2}\ln\beta$.于是,

$$I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+\frac{1}{2}\ln\beta=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}\quad(\alpha>0),$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}\quad(\alpha>0,\beta>0).$$

注 本题中,实际应考察积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}f(x,\alpha)\mathrm{d}x$,其中

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}, & 0<x<+\infty,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易知 $f(x,\alpha)$ 是 $0\leqslant x<+\infty, 0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数($\beta>0$ 固定).我们证明:

$$f'_\alpha(x,\alpha)=-xe^{-\alpha x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty,0<\alpha<+\infty).$$

事实上,当 $0<x<+\infty$ 时,此式显然成立.由于 $f(0,\alpha)\equiv 0\ (0<\alpha<+\infty)$,故 $f'_\alpha(0,\alpha)=0\ (0<\alpha<+\infty)$.因此,上式当 $x=0$ 时也成立.$f'_\alpha(x,\alpha)$ 显然是 $0\leqslant x<+\infty$,$0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数.

在以下许多题中,我们都应作此理解,但不必写出 $f(x,\alpha)$.函数 $\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$ 就代表 $f(x,\alpha)$($x=0$ 时规定其函数值为其极限值 0),而公式

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)=-xe^{-\alpha x^2}$$

当 $x=0$ 时也成立(如上述).这样,才严格符合莱布尼茨法则(积分号下求导数)的条件.

另外,本题若利用逐次积分来作可更简单一些.今作如下:易知(不妨设 $\alpha<\beta$)

$$\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}\,dy,$$

而积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-yx^2}\,dx$ 当 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 时一致收敛(因为 $0\leqslant xe^{-yx^2}\leqslant xe^{-\alpha x^2}$,而 $\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\,dx$ 收敛),故可交换积分次序,得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}\,dy=\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty} xe^{-yx^2}\,dx=\int_\alpha^\beta\frac{dy}{2y}=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

【3794】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx\quad(\alpha>0,\beta>0).$

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{-\alpha e^{-\alpha x}+\beta e^{-\beta x}}{x}=\beta-\alpha,$$

故 $x=0$ 不是瑕点.又由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2=0,$$

故积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$ 收敛($\alpha>0,\beta>0$).

同样,将 $\beta>0$ 固定,考虑含参变量 α 的积分:

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx\quad(\alpha>0).$$

由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx=-2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx=-2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}{}^{*)}\quad(\alpha>0).$$

而当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$,$1\leqslant x<+\infty$ 时,$\left|\dfrac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\right|\leqslant\dfrac{2e^{-\alpha_0 x}}{x}$,且 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha_0 x}}{x}dx$ 收敛(因为 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{e^{-\alpha_0 x}}{x}=0$),故 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛,从而,$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛(注意,因为 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}=\beta-\alpha$,故 $x=0$ 不是瑕点).因此,根据莱布尼茨法则,当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时可在积分号下求导数:

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx=-2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知,上式对一切 $\alpha>0$ 皆成立.积分之,并注意到

$$\int\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}d\alpha=\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}+\beta\ln(\alpha+\beta)+C,$$

即得
$$I(\alpha)=-2\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}-2\beta\ln(\alpha+\beta)+C_1,$$
其中 C_1 是待定常数. 令 $\alpha=\beta$,则由于 $I(\beta)=0$,得
$$0=-2\beta\ln\frac{2\beta}{2\beta}-2\beta\ln2\beta+C_1,$$
故 $C_1=2\beta\ln2\beta$. 于是,得
$$I(\alpha)=\ln\left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2\alpha}-2\beta\ln(\alpha+\beta)+2\beta\ln2\beta=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}},$$
即
$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

*) 利用 3788 题的结果.

【3795】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx\quad(\alpha>0,\beta>0).$

解 当 $m=0$ 时,$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx=0$,故下设$m\neq0$. 由于
$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx=0,$$
故 $x=0$ 不是瑕点,从而,被积函数在区域:$0\leqslant x<+\infty$及 $\alpha>0,\beta>0$内连续($x=0$ 时的函数值理解为极限值). 又由于
$$\left|\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\right|<\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\quad(x>0),$$
而积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx$ 收敛,故积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ 收敛,从而,积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ 收敛. 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时,积分
$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\right)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx$$
是一致收敛的. 事实上,
$$|e^{-\alpha x}\sin mx|\leqslant e^{-\alpha_0 x}\quad(x\geqslant0),$$
而积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx=\frac{1}{\alpha_0}$收敛. 于是,对于积分
$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$$
当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时可应用莱布尼茨法则,得 $\displaystyle I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx=-\frac{m}{\alpha^2+m^2}$ *).

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知,上式对一切 $\alpha>0$ 均成立. 从而,
$$I(\alpha)=-\int\frac{m}{\alpha^2+m^2}d\alpha=-\arctan\frac{\alpha}{m}+C,$$
其中 C 是待定常数. 令 $\alpha=\beta$,则得
$$I(\beta)=0=-\arctan\frac{\beta}{m}+C,$$
故 $C=\arctan\dfrac{\beta}{m}$. 最后得
$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx=\arctan\frac{\beta}{m}-\arctan\frac{\alpha}{m}\quad(m\neq0).$$

*) 利用 1829 题的结果.

【3796】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx\quad(\alpha>0,\beta>0).$

解 同 3795 题,我们可证明:当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时,对积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx$$

可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\right)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos mx\,dx=-\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}{}^{*)}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 均成立. 从而，

$$I(\alpha)=-\int\frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+m^2}=-\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+m^2)+C.$$

其中 C 是待定常数. 令 $\alpha=\beta$，则得

$$I(\beta)=0=-\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)+C,$$

故 $C=\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)$. 最后得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}\quad(\alpha>0,\beta>0).$$

*） 利用 1828 题的结果.

计算下列积分：

【3797】 $\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx\quad(|\alpha|\leqslant1).$

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{2\alpha^2x}{1-\alpha^2x^2}}{2x}=-\alpha^2,$$

故 $x=0$ 不是瑕点. 从而，被积函数在域：$0\leqslant x<1$ 及 $|\alpha|\leqslant1$ 内连续（$x=0$ 时的函数值理解为极限值）. 又由于当 $|\alpha|\leqslant1$ 时，

$$\left|\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right|\leqslant-\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\quad(0<x<1),$$

而积分 $\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$ 收敛 $\left(因为 \lim_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{2}{3}}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{1}{6}}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1+x}}=0\right)$，故积分 $\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x}}dx$ 对 $|\alpha|\leqslant1$ 一致收敛. 从而为 α 的连续函数（$-1\leqslant\alpha\leqslant1$）. 另一方面，易知积分

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right]dx=-2\alpha\int_0^1\frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

对 $|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$ 一致收敛. 事实上，

$$\left|\frac{-2\alpha}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right|\leqslant\frac{2}{1-\alpha_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0\leqslant x<1),$$

而积分 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$ 收敛. 于是，对积分

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$$

当 $|\alpha|\leqslant\alpha_0$ 时可应用莱布尼茨法则，得

$$I'(\alpha)=-2\alpha\int_0^1\frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

由 $\alpha_0<1$ 的任意性知，上式对一切 $|\alpha|<1$ 均成立. 先求不定积分

$$I_1=\int\frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

作代换 $x=\sin t$，易得

$$I_1=\int\frac{dt}{1-\alpha^2\sin^2 t}=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{1-\alpha\sin t}+\int\frac{dt}{1+\alpha\sin t}\right).$$

再对右端两个积分作代换 $u=\tan\frac{t}{2}$，可得

$$\int\frac{dt}{1-\alpha\sin t}=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+C_1,\quad \int\frac{dt}{1+\alpha\sin t}=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+C_2.$$

从而，

$$I'(\alpha)=-2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha\sin t}+\frac{1}{1+\alpha\sin t}\right)dt$$

$$=-\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\quad(|\alpha|<1).$$

两端积分，得 $$I(\alpha)=-\pi\int\frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}=\pi\sqrt{1-\alpha^2}+C\quad(|\alpha|<1).$$

其中 C 是待定常数. 令 $\alpha=0$，得 $$I(0)=0=\pi+C,$$

故 $C=-\pi$，从而， $$I(\alpha)=-\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2})\quad(|\alpha|<1).$$

在此式两端令 $\alpha\to1-0$ 及 $\alpha\to-1+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$ 在 $-1\leqslant\alpha\leqslant1$ 上的连续性，即得

$$I(1)=I(-1)=-\pi.$$

于是，当 $|\alpha|\leqslant1$ 时， $$\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=-\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2}).$$

【3798】 $\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|\alpha|\leqslant1).$

解 同 3797 题，我们可以证明：

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

当 $-1\leqslant\alpha\leqslant1$ 时连续，且当 $|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$ 时可应用莱布尼茨法则. 于是，

$$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx=\int_0^1\frac{-2\alpha x^2}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{(1-\alpha^2x^2)-1}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\quad(|\alpha|\leqslant\alpha_0,\alpha\neq0).$$

由 $\alpha_0<1$ 的任意性知，上式对一切 $0<|\alpha|<1$ 均成立. 积分得

$$I(\alpha)=\int\left(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\right)d\alpha=\pi\ln|\alpha|+\pi\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right|+C=\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2})+C,$$

其中 $|\alpha|<1,\alpha\neq0$，C 为待定常数. 令 $\alpha\to0$，并注意到 $I(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 的连续性，即得

$$I(0)=0=\pi\ln2+C,$$

故 $C=-\pi\ln2$，从而得 $$I(\alpha)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\quad(|\alpha|<1).$$

在上式中令 $\alpha\to1-0$ 及 $\alpha\to-1+0$，并注意到 $I(\alpha)$ 在 $-1\leqslant\alpha\leqslant1$ 上的连续性，即知上式当 $\alpha=\pm1$ 时也成立，即

$$\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\quad(|\alpha|\leqslant1).$$

【3799】 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$

解 设 $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$. 显然有 $I(0)=0$. 当 $\alpha>0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{2}$，故 $I(\alpha)$ 收敛. 其次，易知积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}=\int_0^1\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}$$

对 $\alpha\geqslant0$ 一致收敛. 事实上，当 $\alpha\geqslant0$, $0\leqslant t<1$, 时，有

$$\left|\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

且 $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ 收敛. 于是，可应用莱布尼茨法则，得

$$I'(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\int_0^1\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}=\int_0^1\frac{(t^2+\alpha^2)-\alpha^2}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}dt$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\alpha^2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}=\frac{\pi}{2}-\alpha^2\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\quad(\alpha\geqslant0).$$

从而有
$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\int\frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\alpha^2}+C\quad(\alpha\geqslant0),$$

其中 C 为待定常数. 令 $\alpha=0$，得
$$I(0)=0=-\frac{\pi}{2}+C,$$

故 $C=\frac{\pi}{2}$. 于是，当 $\alpha\geqslant0$ 时，
$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{\pi}{2}(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}).$$

当 $\alpha<0$ 时，
$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=-\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(-\alpha)x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=-\frac{\pi}{2}(1-\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}).$$

于是，当 $-\infty<\alpha<\infty$ 时，
$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{\pi}{2}(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})\operatorname{sgn}\alpha.$$

【3800】 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$.

解 我们首先计算积分

$$I_\beta(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}dx\quad(\alpha\geqslant0\text{ 是参数}, \beta>0\text{ 固定}).$$

首先注意，此积分当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$（$\alpha_1>0$ 为任何有限数）时一致收敛. 事实上，当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时，

$$0\leqslant\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\leqslant\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{\beta^2+x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

而积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{\beta^2x^2}dx$$

收敛（因为易知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{\beta^2+x^2}=0$）. 于是，$I_\beta(\alpha)$ 是 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 上的连续函数. 由 $\alpha_1>0$ 的任意性可知，$I_\beta(\alpha)$ 当 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 时连续.

其次，易证积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\right]dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}dx=\frac{\pi}{\alpha\beta+1}$$

当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时是一致收敛的. 事实上，此时

$$0\leqslant\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\leqslant\frac{2\alpha_1x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}dx$ 收敛. 于是，根据莱布尼茨法则，当 $0\leqslant\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时，可在积分号下求导数，得

$$I'_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\alpha\beta+1}.$$

由 α_1 与 α_0 的任意性知，上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 均成立. 两端积分，得

$$I_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta)+C\quad(0<\alpha<+\infty),$$

其中 C 是某常数. 在此式中令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I_\beta(\alpha)$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上连续，得

$$0=I_\beta(0)=0+C,$$

故 $C=0$. 因此，
$$I_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta)\quad(0\leqslant\alpha<+\infty).$$

对于所求积分，只要作适当变形即得. 当 $\alpha>0,\beta>0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\ln\alpha+\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}x^2\right)}{\beta^2+x^2}dx=2\ln\alpha\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\beta^2+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}x^2\right)}{\beta^2+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi\ln\alpha}{\beta}+\frac{\pi}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta).$$

此式当 $\alpha=0$ 时也成立，只要在两端令 $\alpha\to+0$ 取极限即可. 这是因为积分

$$J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx\ (\beta>0\text{ 固定})$$

当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时一致收敛(易知 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$ 与 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$ 当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时都一致收敛)，事实上，

$$\left|\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\right|\leqslant-\frac{2\ln x}{\beta^2+x^2}\quad\left(0<x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right),\quad\text{而}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\beta^2+x^2}\text{收敛；}$$

$$0\leqslant\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\leqslant\frac{\ln\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}{\beta^2+x^2}\quad\left(\frac{1}{2}\leqslant x<+\infty,0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right),\quad\text{而}\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}{\beta^2+x^2}\text{收敛，}$$

故 $J(\alpha)$ 在点 $\alpha=0$(右)连续.

对于任意的 α 与 $\beta(\beta\neq0)$，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(|\alpha|^2+x^2)}{|\beta|^2+x^2}dx=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|).$$

注意，当 $\beta=0$ 时上式不成立，右端无意义，左端的积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{x^2}dx$ 易知是发散的.

【3801】 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}dx.$

解 先设 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$. 显然 $x=0$ 不是瑕点，因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}=\alpha\beta$.

由于当 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$ 时，$\left|\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}\right|<\frac{\pi^2}{4}\ \frac{1}{x^2}\quad(1\leqslant x<+\infty)$，而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}dx$ 收敛，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}dx$ 在$\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$ 时一致收敛，从而，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}dx$ 也在 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$ 时一致收敛. 因此，函数

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}dx$$

是 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$ 上的二元连续函数.

再考察两个积分

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx,$$

$$K(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\right]dx=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}.$$

由于当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0,\beta\geqslant0$ 时 $\left|\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\right|<\frac{\pi}{2}\ \frac{1}{x(1+\alpha_0^2x^2)}\ (1\leqslant x<+\infty)$，而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha_0^2x^2)}$ 收敛，故

积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$\beta\geqslant0$ 时一致收敛，从而，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$\beta\geqslant0$ 时也一致收敛(因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}=\beta$，故 $x=0$ 不是瑕点)．因此，$J(\alpha,\beta)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$\beta\geqslant0$ 时连续，并且此时 $I(\alpha,\beta)$ 可在积分号下对 α 求导数，得

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x=J(\alpha,\beta).\tag{1}$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，(1)式对一切 $\alpha>0$，$\beta\geqslant0$ 成立；并且 $J(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0$，$\beta\geqslant0$ 上的二元连续函数．

其次，由于当 $\beta\geqslant\beta_0>0$，$\alpha>0$ 时，

$$0<\frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}\leqslant\frac{1}{1+\beta_0^2x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\beta_0^2x^2}$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$ 当 $\beta\geqslant\beta_0$，$\alpha>0$ 时一致收敛．因此，$K(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0$，$\beta\geqslant\beta_0$ 上的连续函数，并且(1)式中的积分当 $\beta\geqslant\beta_0(\alpha>0)$ 时可在积分号下对 β 求导数，得

$$\begin{aligned}I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_\beta(\alpha,\beta)&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}\\&=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\beta^2x^2}=\frac{\alpha\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)}-\frac{\beta\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)},\end{aligned}$$

由 $\beta_0>0$ 的任意性知，对任何 $\alpha>0$，$\beta>0$ 均有

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_\beta(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}.\tag{2}$$

(注意，在推导此式时应设 $\alpha\neq\beta$，因为推导过程中分母内有 $\alpha^2-\beta^2$．但由于 $K(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0$，$\beta>0$ 上的连续函数，故通过取极限即知(2)式当 $\alpha=\beta$ 时也成立)．在(2)式中固定 $\alpha>0$，对 β 积分，得

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=J(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\beta)+C(\alpha)\quad(0<\beta<+\infty),$$

其中 $C(\alpha)$ 是依赖于 α 的常数．在此式中令 $\beta\to+0$，并注意到 $J(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha>0$，$\beta\geqslant0$ 上连续，得

$$0=J(\alpha,0)=\lim_{\beta\to+0}J(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\alpha+C(\alpha),$$

故 $C(\alpha)=-\frac{\pi}{2}\ln\alpha$．因此，

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\quad(\alpha>0,\beta>0).$$

再固定 $\beta>0$，对 α 积分(右端利用分部积分法)，得

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\frac{\pi}{2}\beta\ln(\alpha+\beta)+C^*(\beta),$$

其中 $C^*(\beta)$ 是依赖于 β 的常数．在此式中令 $\alpha\to+0$，并注意到 $I(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$ 上连续，得

$$0=I(0,\beta)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\beta\ln\beta+C^*(\beta),$$

故 $C^*(\beta)=-\frac{\pi}{2}\beta\ln\beta$，于是，

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}\quad(\alpha>0,\beta>0).$$

显然，对于任何 α 与 β，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\alpha\beta)\cdot\frac{\pi}{2}\ln\frac{(|\alpha|+|\beta|)^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|^{|\alpha|}\cdot|\beta|^{|\beta|}},&\alpha\beta\neq0,\\0,&\alpha\beta=0.\end{cases}$$

【3802】 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\mathrm{d}x$.

解 先设 $\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$．首先，注意 $x=0$ 不是瑕点，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}=\alpha^2\beta^2.$$

由于当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 时，恒有

$$0\leqslant\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\leqslant\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^4}$$

而
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^4}\mathrm{d}x$$

收敛(因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^4}=0$)，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\mathrm{d}x$$

当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 时一致收敛. 因此，函数

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\mathrm{d}x \tag{1}$$

是 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上的二元连续函数. 由 $\alpha_1>0,\beta_1>0$ 的任意性知，$I(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$ 上的二元连续函数. 再考察两个积分

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$K(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}\mathrm{d}x=\frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}\quad(\alpha>0,\beta>0). \tag{3}$$

由于当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$，时，恒有

$$0\leqslant\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}\leqslant\frac{2\alpha_1\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^2(1+\alpha_0^2x^2)}\quad(0<x<+\infty),$$

而易知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^2(1+\alpha_0^2x^2)}\mathrm{d}x$ 收敛，故(2)式中的积分在 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上一致收敛. 由此可知，$J(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上的连续函数，并且在其上(1)中的积分可在积分号下对 α 求导数，得

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x=J(\alpha,\beta). \tag{4}$$

由 $\alpha_1>\alpha_0>0$ 及 $\beta_1>0$ 的任意性知，$J(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0,\beta\geqslant0$ 上的连续函数，并且(4)式对一切 $\alpha>0,\beta\geqslant0$ 都成立.

其次，当 $0<\alpha\leqslant\alpha_1, 0<\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 时，恒有

$$0<\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}\leqslant\frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2x^2}\quad(0<x<+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，故(3)式中的积分在 $0<\alpha\leqslant\alpha_1, 0<\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上一致收敛. 于是，在其上(2)式中的积分可在积分号下对 β 求导数，得

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_\beta(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}\mathrm{d}x=\frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \tag{5}$$

由 $\alpha_1>0,\beta_1>\beta_0>0$ 的任意性知，(5)式对一切 $\alpha>0,\beta>0$ 都成立. (5)式两端对 β 积分之($\alpha>0$ 固定)，得

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=J(\alpha,\beta)=2\pi\alpha\beta-2\pi\alpha^2\ln(\alpha+\beta)+C(\alpha)\quad(0<\beta<+\infty),$$

其中 $C(\alpha)$ 是依赖于 α 的常数. 在此式中令 $\beta\to+0$，取极限，并注意到 $J(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha>0,\beta\geqslant0$，上连续，得

$$0=J(\alpha,0)=\lim_{\beta\to+0}J(\alpha,\beta)=-2\pi\alpha^2\ln\alpha+C(\alpha),$$

故 $C(\alpha)=2\pi\alpha^2\ln\alpha$. 因此，

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=2\pi\alpha\beta-2\pi\alpha^2\ln(\alpha+\beta)+2\pi\alpha^2\ln\alpha\quad(\alpha>0,\beta>0).$$

两端再对 α 积分($\beta>0$ 固定)，得

$$I(\alpha,\beta)=\pi\alpha^2\beta-\frac{2}{3}\pi\alpha^3\ln(\alpha+\beta)+\frac{2\pi}{9}(\alpha+\beta)^3-\pi\alpha^2\beta-\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln(\alpha+\beta)+\frac{2}{3}\pi\alpha^3\ln\alpha-\frac{2\pi}{9}\alpha^3+C^*(\beta)$$

$$(0<\alpha<+\infty),$$

其中 $C^*(\beta)$ 是依赖于 β 的常数. 在此式两端令 $\alpha\to+0$ 取极限,并注意到 $I(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$ 上连续,得

$$0=I(0,\beta)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha,\beta)=\frac{2\pi}{9}\beta^3-\frac{2}{3}\alpha\beta^3\ln\beta+C^*(\beta),$$

故 $C^*(\beta)=-\frac{2}{9}\pi\beta^3+\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln\beta$. 于是,

$$\begin{aligned}I(\alpha,\beta)&=-\frac{2}{3}\pi(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)+\frac{2\pi}{9}(\alpha+\beta)^3-\frac{2\pi}{9}\alpha^3-\frac{2}{9}\pi\beta^3+\frac{2}{3}\pi(\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta)\\&=\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]\quad(\alpha>0,\beta>0).\end{aligned}$$

因此,对任意的 α,β 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$$

$$=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}[|\alpha\beta|(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha|^3\ln|\alpha|+|\beta|^3\ln|\beta|-(|\alpha|^3+|\beta|^3)\ln(|\alpha|+|\beta|)], & \alpha\beta\neq0,\\ 0, & \alpha\beta=0.\end{cases}$$

【3803】 从公式 $I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}xe^{-x^2y^2}dy$ 出发,计算欧拉—泊松积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

解 在积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 中令 $x=ut$,其中 u 为任意正数,即得

$$I=u\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}dt.$$

在上式两端乘以 $e^{-u^2}du$,再对 u 从 0 到 $+\infty$ 积分,得

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\int_0^{+\infty}ue^{-u^2t^2}dt.\tag{1}$$

由于被积函数 $ue^{-(1+t^2)u^2}$ 是非负的连续函数,并且积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udu=\frac{1}{2(1+t^2)}\quad 及\quad \int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udt=e^{-u^2}I$$

分别对于 t 及 u 是连续的,积分互换后的逐次积分显然存在. 于是,(1)式中的积分顺序可以互换*),并且有

$$I^2=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udu=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

由于 $I>0$,故

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷 483 目定理Ⅴ的系理.

利用欧拉—泊松积分,求下列积分:

【3804】 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx\quad(a>0,ac-b^2>0)$*).

解题思路 注意 $ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]$,令 $\frac{1}{\sqrt{a}}(ax+b)=t$,并利用 3803 题的结果,即可获解.

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]}dx=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2}dx=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

*) 只要假定 $a>0$,条件 $ac-b^2>0$ 可去掉.

【3805】 $\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx\quad(a>0,ac-b^2>0)$*).

解 设 $\frac{1}{\sqrt{a}}(ax+b)=t$,则 $x=\frac{\sqrt{a}t-b}{a}$. 代入得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{a_1}{a}t^2+\frac{2(ab_1-a_1b)}{a\sqrt{a}}t+\frac{a_1b^2-2abb_1}{a^2}+c_1\right]e^{-t^2}dt.$$

由于 $$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}td(e^{-t^2})=-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt=0 \quad 及 \quad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi},$$

故得 $$\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\left[\frac{a_1}{a}\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\left(\frac{a_1b^2-2abb_1}{a^2}+c_1\right)\sqrt{\pi}\right]$$

$$=\frac{(a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

*） 只要假定 $a>0$，条件 $ac-b^2>0$ 可去掉.

【3806】 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\operatorname{ch}bx dx \quad (a>0)$.

提示 利用 3804 题的结果.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\operatorname{ch}bxdx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}(e^{bx}+e^{-bx})dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2-bx)}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+bx)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}{}^{*)}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

*） 利用 3804 题的结果.

【3807】 $\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx \quad (a>0)$.

提示 注意 $x^2+\frac{a^2}{x^2}=(x+\frac{a}{x})^2-2a$，并利用 2355 题及 3804 题的结果.

解 由于积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，故利用 2355 题的结果，即得

$$\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx=e^{2a}\int_0^{+\infty}e^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)^2}dx=e^{2a}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+4a)}dx=e^{-2a}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

【3808】 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx \quad (\alpha>0,\beta>0)$.

提示 利用分部积分法及 3804 题的结果.

解 由分部积分法知，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}(e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2})d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\Big|_0^{+\infty}-2\int_0^{+\infty}(\alpha e^{-\alpha x^2}-\beta e^{-\beta x^2})dx$$

$$=-2\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2}d(\sqrt{\alpha}x)+2\int_0^{+\infty}\sqrt{\beta}e^{-(\sqrt{\beta}x)^2}d(\sqrt{\beta}x)=-2\sqrt{\alpha}\frac{\sqrt{\pi}}{2}+2\sqrt{\beta}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}).$$

【3809】 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx dx \quad (a>0)$.

解 令 $I(b)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$. 由于 $e^{-ax^2}\cos bx$ 与 $\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2}\cos bx)=-xe^{-ax^2}\sin bx$ 都是 $x\geqslant0$，$-\infty<b<+\infty$上的连续函数，并且此时

$$|e^{-ax^2}\cos bx|\leqslant e^{-ax^2}, \qquad |xe^{-ax^2}\sin bx|\leqslant xe^{-ax^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$ 与 $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$ 都收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$ 与$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx$ 都在 $-\infty<b<+\infty$上一致收敛，从而可在积分号下求导数，得

$$I'(b)=-\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx \quad (-\infty<b<+\infty).$$

利用分部积分法，得

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\frac{b}{2a}I(b),$$

故 $I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b)$ $(-\infty<b<+\infty)$. 于是，

$$\int\frac{I'(b)}{I(b)}db=-\frac{1}{2a}\int b\,db,$$

即
$$\ln I(b)=-\frac{b^2}{4a}+C\quad(-\infty<b<+\infty),$$

其中 C 是待定常数，也即
$$I(b)=C_1e^{-\frac{b^2}{4a}}\quad(-\infty<b<+\infty),$$
其中 C_1 也是待定常数. 但

$$I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

代入，得 $C_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 于是，最后得

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx=I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}\quad(-\infty<b<+\infty).$$

【3810】 $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bx\,dx\quad(a>0)$.

提示 利用分部积分法及 3809 题的结果.

解 $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bx\,dx=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\sin bx\,d(e^{-ax^2})=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$

$$=\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}{}^{*)}.$$

*) 利用 3809 题的结果.

【3811】 $\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$ （n 为正整数）.

解 由 3809 题得

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.\tag{1}$$

积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k}{\partial b^k}(e^{-x^2}\cos 2bx)dx=2^k\int_0^{+\infty}x^ke^{-x^2}\cos\left(2bx+\frac{k\pi}{2}\right)dx,\tag{2}$$

而
$$\left|x^ke^{-x^2}\cos\left(2bk+\frac{k\pi}{2}\right)\right|\leqslant x^ke^{-x^2}\quad(x\geqslant0).$$

但是积分 $\int_0^{+\infty}x^ke^{-x^2}dx$ 对于任意的正整数 k 均收敛，故积分(2)当 $-\infty<b<+\infty$ 时一致收敛. 因此，(1)式的左端可在积分号下求任意次导数，从而可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial^{2n}}{\partial b^{2n}}(e^{-x^2}\cos 2bx)dx=\int_0^{+\infty}2^{2n}x^{2n}e^{-x^2}\cos(2bx+n\pi)dx$$

$$=2^{2n}(-1)^n\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2}),$$

即
$$\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2}).$$

【3812】 从积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 出发，计算狄利克雷积分 $D(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$.

解 先设 $\beta>0$，将 β 固定，α 视为参变量. 仿 3760 题的证法，可知积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant0$ 时一致

收敛，从而，$I(\alpha)$是 $\alpha\geqslant 0$ 上的连续函数(注意，上述积分中 $x=0$ 不是瑕点，因为 $\lim\limits_{x\to+0} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}=\beta$). 由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\right)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin\beta x dx=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

易知积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin\beta x dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛(因为此时 $|e^{-\alpha x}\sin\beta x|\leqslant e^{-\alpha_0 x}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx$ 收敛)，故知当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 可在积分号下求导数，得

$$I'(\alpha)=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 皆成立. 两端对 α 积分，得

$$I(\alpha)=-\arctan\frac{\alpha}{\beta}+C\ (0<\alpha<+\infty),\tag{1}$$

其中 C 是某常数. 由 $|\sin u|\leqslant|u|$ 知

$$|I(\alpha)|\leqslant\beta\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{\beta}{\alpha}\quad(0<\alpha<+\infty),$$

由此可知 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=0$. 在(1)式两端令 $\alpha\to+\infty$ 取极限，得 $0=-\frac{\pi}{2}+C$，故 $C=\frac{\pi}{2}$. 于是，

$$I(\alpha)=-\arctan\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\pi}{2}\quad(0<\alpha<+\infty).\tag{2}$$

在(2)式两端令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant 0$ 时连续，即得

$$D(\beta)=I(0)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha)=\frac{\pi}{2}.$$

当 $\beta<0$ 时，$D(\beta)=-D(-\beta)=-\frac{\pi}{2}$. 又显然有 $D(0)=0$. 综上所述，有

$$D(\beta)=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\beta.$$

利用狄利克雷积分和傅茹兰积分，求下列积分：

【3813】 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx\quad(\alpha>0)$.

解 令 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$. 首先注意到 $x=0$ 不是瑕点，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{-2\alpha xe^{-\alpha x^2}+\beta\sin\beta x}{2x}=\frac{\beta^2}{2}-\alpha.$$

由于

$$\left|\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\right|\leqslant\frac{2}{x^2}\quad(x>0),$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$ 在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上一致收敛，从而，$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$ 也在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上一致收敛. 于是，$I(\beta)$是 $-\infty<\beta<+\infty$ 上的连续函数. 下设 $\beta>0$. 由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}^{*)},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 在 $\beta\geqslant\beta_0>0$ 上一致收敛(因为当 $x\to+\infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 单调递减趋于零，而 $\left|\int_0^A\sin\beta x dx\right|=\left|\frac{1-\cos\beta x}{x}\right|\leqslant\frac{2}{\beta_0}$，故由狄利克雷判别法知，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时一致收敛). 于是，当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时，可在积分号下求导数，得

$$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.\tag{1}$$

由 $\beta_0>0$ 的任意性知，(1)式对一切 $\beta>0$ 皆成立. 于是，

$$I(\beta)=\frac{\pi}{2}\beta+C \quad (0<\beta<+\infty), \tag{2}$$

其中 C 是某常数. 在(2)式两端令 $\beta\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\beta)$ 在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上的连续性，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-1}{x^2}=I(0)=\lim_{\beta\to+0}I(\beta)=C. \tag{3}$$

根据 3808 题的结果知

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}) \quad (\alpha>0,\beta>0). \tag{4}$$

令 $J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$ $(\alpha>0)$. 仿上面的证明，易知 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$ 当 $\beta\geqslant0$ 时一致收敛，故 $J(\beta)$ 是 $\beta\geqslant0$ 上的连续函数. 于是，在(4)式两端令 $\beta\to+0$ 取极限，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-1}{x^2}dx=J(0)=\lim_{\beta\to+0}J(\beta)=-\sqrt{\pi\alpha} \quad (\alpha>0),$$

以此代入(3)式，得 $C=-\sqrt{\pi\alpha}$. 于是，

$$I(\beta)=\frac{\pi}{2}\beta-\sqrt{\pi\alpha} \quad (0\leqslant\beta<+\infty).$$

当 $\beta<0$ 时，$I(\beta)=I(-\beta)=\frac{\pi}{2}(-\beta)-\sqrt{\pi\alpha}$. 总之，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}|\beta|-\sqrt{\pi\alpha} \quad (\alpha>0).$$

*) 利用 3812 题的结果.

【3814】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx.$

提示 注意 $\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]$，并利用 3790 题的结果.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$ *).

*) 利用 3790 题的结果.

【3815】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx.$

提示 利用 3791 题及 3812 题的结果，可得

原式 $=0$，若 $|\alpha|<|\beta|$；原式 $=\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\alpha$，若 $|\alpha|=|\beta|$；原式 $=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha$，若 $|\alpha|>|\beta|$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x-\sin(\beta-\alpha)x}{x}dx$

$$=\begin{cases}0, & |\alpha|<|\beta| \ ^{*)},\\ \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\alpha, & |\alpha|=|\beta| \ ^{**)},\\ \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha, & |\alpha|>|\beta| \ ^{***)}.\end{cases}$$

*) 利用 3791 题的结果.

)及 *) 利用 3812 题的结果.

【3816】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx.$

提示 注意 $\sin^3\alpha x=\frac{3}{4}\sin\alpha x-\frac{1}{4}\sin3\alpha x$，并利用 3812 题的结果.

解 由于 $\sin 3\alpha x=3\sin\alpha x-4\sin^3\alpha x$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{3\sin\alpha x-\sin 3\alpha x}{4x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha.$$

*） 利用 3812 题的结果.

【3817】 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx.$

解 令 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$. 先设 $\alpha\geqslant 0$. 显然 $x=0$ 不是瑕点，因为 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2=\alpha^2$. 而由于 $\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\leqslant\frac{1}{x^2}$，又 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 上一致收敛，从而，$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 时一致收敛. 因此，$I(\alpha)$ 是 $\alpha\geqslant 0$ 上的连续函数.

又因 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛（参看 3813 题的解题过程），故当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时可在积分号下求导数，得

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2};\tag{1}$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，(1)式对一切 $\alpha>0$ 皆成立. 两端积分，得

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha+C\quad(0<\alpha<+\infty).$$

其中 C 是某常数. 在上式两端令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 时的连续性知

$$0=I(0)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha)=C.$$

于是，$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha\ (0\leqslant\alpha<+\infty)$. 当 $\alpha<0$ 时，显然 $I(\alpha)=I(-\alpha)=\frac{\pi}{2}(-\alpha)$，故对于任何 α，有

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx=I(\alpha)=\frac{\pi}{2}|\alpha|.$$

【3818】 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx.$

提示 两次使用分部积分法，并利用 3812 题及 3816 题的结果.

解
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx&=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin^3\alpha x\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2x^2}\sin^3\alpha x\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}dx\\&=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}dx=-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\,d\left(\frac{1}{x}\right)\\&=-\frac{3\alpha}{2x}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\Big|_0^{+\infty}+\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x\cos^2\alpha x-\alpha\sin^3\alpha x}{x}dx\\&=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x}{x}dx-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^3\alpha x}{x}dx=3\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\frac{9}{2}\alpha^2\cdot\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha^{*)}\\&=\frac{3\pi}{8}\alpha^2\operatorname{sgn}\alpha=\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|.\end{aligned}$$

*） 利用 3816 题的结果.

【3819】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx.$

提示 使用分部积分法，并利用 3812 题的结果.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\sin^4 x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{(3\sin x-\sin 3x)\cos x}{x}dx$

$=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$

【3820】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx.$

提示 注意 $\sin^4 x=\frac{1}{8}(\cos4x-4\cos2x+3)$，并利用 3790 题的结果.

解 由于 $\sin^4 x=\frac{1}{8}(\cos4x-4\cos2x+3)$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\cos4\alpha x-\cos4\beta x}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos2\alpha x-\cos2\beta x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\qquad(\alpha\neq0,\beta\neq0).$$

注 若 $\alpha=\beta=0$，显然积分为零；若 $\alpha=0\ (\beta\neq0)$ 或 $\beta=0\ (\alpha\neq0)$，易知积分发散.

【3821】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}\mathrm{d}x.$

提示 令 $x=\sqrt{t}$，并利用 3812 题的结果.

解 作代换 $x=\sqrt{t}$，则有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$

【3822】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\mathrm{d}x\quad(k\geqslant0,\alpha>0,\beta>0).$

解 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-kx}\sin\alpha x\sin\beta x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\{-k\mathrm{e}^{-kx}\sin\alpha x\sin\beta x+\mathrm{e}^{-kx}(\alpha\sin\beta x\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x\cos\beta x)\}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\alpha\sin\beta x\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\mathrm{d}x-k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\alpha\sin\beta x\cos\alpha x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin(\alpha+\beta)x-\sin(\alpha-\beta)x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}\left(\arctan\frac{\alpha+\beta}{k}-\arctan\frac{\alpha-\beta}{k}\right)^{*)},$$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\beta\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{2}\left(\arctan\frac{\alpha+\beta}{k}+\arctan\frac{\alpha-\beta}{k}\right),$$

且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{[(\mathrm{e}^{-kx}-1)+1][\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]}{2x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-kx}-1)\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-kx}-1)\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{x}\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2+k^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2+k^2}{}^{**)}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|=\frac{1}{4}\ln\frac{(\alpha+\beta)^2+k^2}{(\alpha-\beta)^2+k^2},$$

故 $$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\alpha+\beta}{2}\arctan\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\arctan\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{4}\ln\frac{(\alpha-\beta)^2+k^2}{(\alpha+\beta)^2+k^2}.$$

*) 利用 3812 题的结果.

**) 易知 3796 题的结果当 $\alpha>0,\beta=0$ 时也成立.

【3823】 对于不同的 x 值，求狄利克雷间断乘子

$$D(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda\cos\lambda x\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda},$$

作出函数 $y=D(x)$ 的图像.

解 $\displaystyle D(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x)\lambda+\sin(1-x)\lambda}{\lambda}\mathrm{d}\lambda.$

当 $|x|<1$ 时，$1+x>0$ 及 $1-x>0$，利用 3812 题的结果，即得 $D(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1$；

当$|x|=1$时，$1+x$ 及 $1-x$ 中总有一个为零，一个为正值，即得$D(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$；

当$|x|>1$时，$(1+x)(1-x)<0$，即得 $D(x)=0$. 如图 7.3 所示.

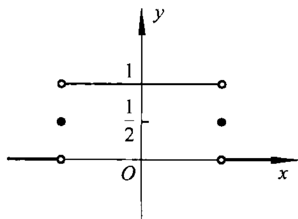


图 7.3

【3824】 计算积分：

(1) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}dx$；　(2) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}dx$.

解 (1) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}dx=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a(t-b)}{t}dt$

$$=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin at\cos ab}{t}dt-V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos at\sin ab}{t}dt=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin at}{t}\cos ab\,dt=\pi\operatorname{sgn}a\cos ab.$$

类似地，可求得

(2) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}dx=\pi\operatorname{sgn}a\sin ab$.

【3825】 利用公式
$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy,$$
计算拉普拉斯积分
$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx.$$

解 $L=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\,dx\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy$. 由于被积函数 $\cos\alpha x e^{-y(1+x^2)}$ 是 $0\leqslant x<+\infty$，$0\leqslant y<+\infty$上的连续函数，并且绝对值的积分

$$\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}\left|e^{-y(1+x^2)}\cos\alpha x\right|dx\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\pi}{2}<+\infty,$$

故原逐次积分可交换积分顺序，得

$$L=\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}\cos\alpha x\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{\alpha^2}{4y}}dy^{*)}=\int_0^{+\infty}\sqrt{\pi}e^{-\left[t^2+\frac{1}{t^2}\left(\frac{|\alpha|}{2}\right)^2\right]}dt$$

$$=\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\frac{|\alpha|}{2}}{}^{**)}=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}.$$

*) 利用 3809 题的结果.

**) 利用 3807 题的结果.

【3826】 计算积分 $L_1=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$.

解 由于$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right)=-\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}$，因此我们考虑积分 $L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$.

由于$\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，而$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$收敛，故$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ 当$-\infty<\alpha<+\infty$时一致收敛. 又因当$\alpha\geqslant\alpha_0\geqslant0$时，$\left|\int_0^A\sin\alpha x\,dx\right|=\left|\frac{1-\cos\alpha A}{\alpha}\right|\leqslant\frac{2}{\alpha_0}$，而 $\frac{x}{1+x^2}$ 当$x>1$时递减，且当 $x\to+\infty$时趋于零，于是，由狄利克雷判别法可知，积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛. 因此，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时可在积分号下求导数，得

$$\frac{dL}{d\alpha}=-L_1. \tag{1}$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知,(1)式对一切 $\alpha>0$ 成立.由 3825 题知,当 $\alpha>0$ 时,$L=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$.于是,由(1)式知

$$L_1=-\frac{dL}{d\alpha}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}\quad(\alpha>0).$$

显然,当 $\alpha<0$ 时,
$$L_1=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(-\alpha)x}{1+x^2}dx=-\frac{\pi}{2}e^{\alpha};$$

而当 $\alpha=0$ 时,$L_1=0$,综上所述,有
$$L_1=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha e^{-|\alpha|}.$$

计算积分:

【3827】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx.$

提示 利用 3825 题的结果.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2\,*)}=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2}).$

*) 利用 3825 题的结果.

【3828】 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx.$

提示 注意 $1=(1+x^2)-x^2$,使用分部积分法,并利用 3825 题与 3826 题的结果.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx-\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x\cos\alpha x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}+\frac{1}{2}\frac{x\cos\alpha x}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x-\alpha x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx+\frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}-\frac{\pi}{4}e^{-|\alpha|}+\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot e^{-|\alpha|\,*)}=\frac{\pi}{4}(1+|\alpha|)e^{-|\alpha|}.$$

*) 利用 3825 题与 3826 题的结果.

【3829】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx\quad(a>0,ac-b^2>0).$

解 $ax^2+2bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}\right]$.令

$$m=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a},\quad t=\frac{1}{m}\left(x+\frac{b}{a}\right)\quad(m>0),$$

则
$$ax^2+2bx+c=am^2(t^2+1),\quad \cos\alpha x=\cos\alpha\left(mt-\frac{b}{a}\right)=\cos\alpha mt\cos\frac{b\alpha}{a}+\sin\alpha mt\sin\frac{b\alpha}{a}.$$

于是,
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx=\frac{1}{am}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt\cos\frac{b\alpha}{a}}{1+t^2}dt+\frac{1}{am}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha mt\sin\frac{b\alpha}{a}}{1+t^2}dt.$$

由于 $\left|\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+t^2}$,而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\pi$ 收敛,故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}dt$ 收敛.同理,积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha mt}{1+t^2}dt$ 收敛.又由于$\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}$为偶函数,$\frac{\sin\alpha mt}{1+t^2}$为奇函数,故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}dt=\pi e^{-m|\alpha|\,*)},\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha mt}{1+t^2}dt=0.$$

从而得
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx=\frac{1}{am}\cos\frac{b\alpha}{a}\cdot\pi e^{-m|\alpha|}=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{b\alpha}{a}\,e^{-\frac{|\alpha|\sqrt{ac-b^2}}{a}}.$$

*） 利用 3825 题的结果.

【3830】 利用公式 $$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}dy \quad (x>0),$$

计算菲涅尔积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 及 $\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$.

解 在积分$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-xy^2dy}$的两端乘以 $\sin x$，再在$0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$上积分，则得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{x_1}dx\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy^2}dy.$$

由于$|\sin x\cdot e^{-xy^2}|\leqslant e^{-x_0y^2}$，而$\int_0^{+\infty}e^{-x_0y^2}dy$收敛，故积分$\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy^2}dy$对$x_0\leqslant x\leqslant x_1$一致收敛，从而可进行积分顺序的互换，得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dy\int_{x_0}^{x_1}\sin x\cdot e^{-xy^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[-\frac{e^{-xy^2}(y^2\sin x+\cos x)}{1+y^4}\right]\Bigg|_{x_0}^{x_1}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_0\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_0y^2}}{1+y^4}dy+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_0\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_0y^2}}{1+y^4}dy-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy.$$

上述等式右端的诸积分分别对$0\leqslant x_0<+\infty$，$0\leqslant x_1<+\infty$都是一致收敛的（事实上，$e^{-x_0y^2}\leqslant 1$，$e^{-x_1y^2}\leqslant 1$，且积分$\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^4}dy$及$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}$均收敛）. 于是，它们分别都是$x_0,x_1(0\leqslant x_0<+\infty,0\leqslant x_1<+\infty)$的连续函数. 从而，让$x_0\to+0$，可在积分号下取极限，得

$$\int_0^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_1y^2}}{1+y^2}dy-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy.$$

由于上式右端的后两个积分均不超过积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x_1y^2}dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x_1}},\quad 且 \quad \lim_{x_1\to+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{x_1}}=0,$$

故令$x_1\to+\infty$，即得 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

最后得 $$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

同法可得 $$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

求下列积分：

【3831】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax^2+2bx+c)dx \quad (a\neq 0)$.

提示 注意 $$ax^2+2bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}\right],$$

令$x+\frac{b}{a}=t$，对$\sin\left(at^2+\frac{ac-b^2}{a}\right)$使用和角公式，并利用 3830 题的结果，但必须注意

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin at^2dt=\mathrm{sgn}a\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y^2dy.$$

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax^2+2bx+c)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(at^2+\frac{ac-b^2}{a}\right)dt$

$$=\cos\frac{ac-b^2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin at^2dt+\sin\frac{ac-b^2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos at^2dt$$

$$=\mathrm{sgn}a\cos\frac{ac-b^2}{a}\,\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y^2dy+\sin\frac{ac-b^2}{a}\,\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos y^2dy$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2|a|}}\left(\operatorname{sgn}a\cos\frac{ac-b^2}{a}+\sin\frac{ac-b^2}{a}\right)^{*)}=\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a\right).$$

*）利用 3830 题的结果.

【3832】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cos 2ax\mathrm{d}x$.

提示 利用 3831 题的结果.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cos 2ax\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sin(x^2+2ax)+\sin(x^2-2ax)]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)+\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)\right]^{*)}=\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)=\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}+a^2\right).$$

*）利用 3831 题的结果.

【3833】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cos 2ax\mathrm{d}x$.

提示 利用 3831 题的结果.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cos 2ax\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos(x^2+2ax)+\cos(x^2-2ax)]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sin\left(x^2+2ax+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x^2-2ax+\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}2\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}-a^2+\frac{\pi}{4}\right)^{*)}=\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}+a^2\right).$$

*）利用 3831 题的结果.

【3834】 证明公式：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha \quad (\alpha\geqslant 0)$； (2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha \quad (\alpha>0)$.

这里 $a\neq 0$，积分应了解为在柯西主值的意义上.

证 (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x$

$$=\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a-x}\mathrm{d}x+\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a+x}\mathrm{d}x+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a-x}\mathrm{d}x+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a+x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[-\int_a^{\eta}\frac{\cos\alpha(a-t)}{t}\mathrm{d}t+\int_a^{2a-\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t-\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t+a)}{t}\mathrm{d}t+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t+\int_{2a+\eta}^{2a-\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t-\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t+a)}{t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t-a)-\cos\alpha(t+a)}{t}\mathrm{d}t+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t-\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\int_{\eta}^{A-a}\frac{2\sin\alpha t\sin\alpha a}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2a}\lim_{A\to+\infty}\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2a}\lim_{\eta\to+0}\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sin a\alpha}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha^{*)}.$$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x$

$$=\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x+\int_{a+\eta}^{A}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\sin\alpha x}{x-a}\mathrm{d}x+\int_0^{a-\eta}\frac{\sin\alpha x}{x+a}\mathrm{d}x+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\sin\alpha x}{x-a}\mathrm{d}x+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\sin\alpha x}{x+a}\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{-a}^{-\eta}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt+\int_{a}^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt+\int_{\eta}^{A-a}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{\eta}^{a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt+\int_{a}^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt+\int_{\eta}^{A-a}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{\eta}^{A-a}\frac{\sin\alpha(t-a)+\sin\alpha(t+a)}{t}dt+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt+\int_{2a+\eta}^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\int_{\eta}^{A-a}\frac{2\sin\alpha t\cos\alpha a}{t}dt-\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_{A-a}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt+\frac{1}{2}\lim_{\eta\to+0}\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$=-\cos a\alpha\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha^{*)}.$$

*） 利用 3812 题的结果.

作者注： 原题 1) 应加上条件 $\alpha\geqslant 0$. 当 $\alpha<0$ 时,有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(-\alpha)x}{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{2a}\sin a(-\alpha)=-\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha.$$

原题 2) 应加上条件 $\alpha>0$. 当 $\alpha=0$ 时等式显然不成立(左端等于 0,右端等于 $-\frac{\pi}{2}$);当 $\alpha<0$ 时,有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx=-\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin(-\alpha)x}{a^2-x^2}dx=-\left[-\frac{\pi}{2}\cos a(-\alpha)\right]=\frac{\pi}{2}\cos a\alpha.$$

【3835】 对于函数 $f(t)$,求拉普拉斯变换

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt\quad(p>0).$$

设:

(1) $f(t)=t^n$(n 为正整数); (2) $f(t)=\sqrt{t}$; (3) $f(t)=e^{\alpha t}$;

(4) $f(t)=te^{-\alpha t}$; (5) $f(t)=\cos t$; (6) $f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}$;

(7) $f(t)=\sin\alpha\sqrt{t}$.

解 (1) $F(p)=\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}t^n dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}t^n\Big|_{0}^{+\infty}+\frac{n}{p}\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}t^{n-1}dt$

$$=\frac{n}{p}\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}t^{n-1}dt\overbrace{=\cdots=}^{n-1\text{次}}\frac{n!}{p^n}\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

(2) $F(p)=\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\sqrt{t}\,dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\sqrt{t}\Big|_{0}^{+\infty}+\frac{1}{2p}\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{p}\int_{0}^{+\infty}e^{-pu^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}.$

(3) $F(p)=\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}e^{\alpha t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{(\alpha-p)t}dt$. 当 $p>\alpha$ 时,$F(p)=\frac{1}{p-\alpha}$;当 $p\leqslant\alpha$ 时,积分发散.

(4) $F(p)=\int_{0}^{+\infty}te^{-pt}e^{-\alpha t}dt=\int_{0}^{+\infty}te^{-(p+\alpha)t}dt=\frac{1}{(p+\alpha)^2}\quad(p+\alpha>0)^{*)}.$

*） 利用本题(1)的结果:$n=1$.

(5) $F(p)=\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\cos t dt=\frac{-p\cos t+\sin t}{p^2+1}e^{-pt}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{p}{p^2+1}.$

(6) $F(p)=\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}dt.$

由于 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{1-e^{-t}}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-1}}{t}=0$, 故函数 $\frac{1-e^{-t}}{t}$ 有界:$0<\frac{1-e^{-t}}{t}\leqslant M=$常数 $(0<t<+\infty)$.

由此可知,当 $p>0$ 时,积分 $\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ 收敛,并且

$$0<F(p)\leqslant M\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{M}{p}\quad(0<p<+\infty).\tag{1'}$$

再考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}\right)dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}(e^{-t}-1)dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p+1)t}dt-\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\quad(p>0),$$

它对 $p\geqslant p_0>0$ 是一致收敛的. 因此，当 $p\geqslant p_0$ 时，可对函数 $F(p)$ 应用莱布尼茨法则，得

$$F'(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\quad(\text{当 } p\geqslant p_0 \text{ 时}),$$

由 $p_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $p>0$ 均成立. 两端积分，得

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}+C\quad(0<p<+\infty),\tag{2'}$$

其中 C 是某常数. 由(1′)式知，

$$\lim_{p\to+\infty}F(p)=0.$$

于是，在(2′)式两端令 $p\to+\infty$，取极限，得 $C=0$. 由此可知

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

(7) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\alpha\sqrt{t}\,dt=2\int_0^{+\infty}ue^{-pu^2}\sin\alpha u\,du=\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$ *)

*) 利用 3810 题的结果.

【3836】 证明公式:(利普希茨积分)

$$\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(a>0),$$

其中 $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)d\varphi$ 为 0 阶贝塞尔函数(参阅 3726 题).

证 $\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-at}dt\cdot\int_0^{\pi}\cos(bt\sin\varphi)d\varphi.$

由于积分 $\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)dt$ 对 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 是一致收敛的，故可交换积分顺序，得

$$\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{-a\cos(bt\cos\varphi)+b\sin\varphi\sin(bt\sin\varphi)}{a^2+b^2\sin^2\varphi}e^{-at}\Big|_0^{+\infty}\right)d\varphi$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\tan\varphi)}{(a^2+b^2)\tan^2\varphi+a^2}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(a^2+b^2)t^2+a^2}$$

$$=\frac{2a}{\pi}\frac{1}{a\sqrt{(a^2+b^2)}}\arctan\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}t\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

【3837】 求魏尔斯特拉斯变换 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}f(y)dy.$

设:(1) $f(y)=1$; (2) $f(y)=y^2$; (3) $f(y)=e^{2ay}$; (4) $f(y)=\cos ay$.

解 (1) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1.$

(2) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}y^2dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}(x+u)^2du$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u^2du+\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}udu+\frac{x^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du.$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u^2du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u^2e^{-u^2}du=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}ud(e^{-u^2})=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}ue^{-u^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2},$$

及 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u du=0$，故得

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=x^2+\frac{1}{2}.$$

(3) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} e^{2ay} dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2+2ay} dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2+2ax}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x-a)^2} dy$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2+2ax} 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=e^{a^2+2ax}.$$

(4) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} \cos ay dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos a(x+u) du$

$$=\frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos au du-\frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin au du$$

$$=\frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{2}\sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}} {}^{*)}-0=e^{-\frac{a^2}{4}}\cos ax.$$

*) 利用 3809 题的结果.

【3838】 切比雪夫—埃尔米特多项式由公式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

定义，证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx=\begin{cases} 0, & m\neq n, \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n. \end{cases}$$

证 由 1231 题的结果知，$H_n(x)$ 为一个 n 次多项式，且 x^n 的系数为 2^n. 不妨设 $m\leqslant n$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})dx=(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)d\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\right]$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})dx=\cdots$$

$$=(-1)^{n+m}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(m)}(x)\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2})dx=\cdots=(-1)^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(x)e^{-x^2} dx.$$

当 $m<n$ 时，$H_m^{(n)}(x)=0$，故 $\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx=0$；

当 $m=n$ 时，$H_m^{(n)}(x)=2^n n!$，故 $\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx=2^n n!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx=2^n n!\sqrt{\pi}.$

【3839】 计算在概率论中有重要意义的积分

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}} d\xi \quad (\sigma_1>0,\sigma_2>0).$$

解 注意到

$$\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}=\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2-2\sigma_1^2 x\xi+\sigma_1^2 x^2],$$

并令

$$a=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}, \quad b=-\frac{\sigma_1^2 x}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}, \quad c=\frac{\sigma_1^2 x^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

即得

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a\xi^2+2b\xi+c)} d\xi=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}} {}^{*)}$$

将 a,b,c 的表达式代入上式，并令 $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$，化简整理得

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

*) 利用 3804 题的结果.

【3840】 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且绝对可积*). 证明:积分

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

满足热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及初始条件 $\lim\limits_{t\to+0}u(x,t)=f(x)$.

证 当 $t>0,-\infty<x<+\infty$ 时, $\left|f(\xi)e^{-\frac{(\xi-a)^2}{4a^2t}}\right|\leqslant|f(\xi)|$, 而 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi<+\infty$, 故积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

在 $t>0,-\infty<x<+\infty$ 上一致收敛,从而, $u(x,t)$ 是 $t>0,-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数. 考虑积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{(\xi-x^2)^2}{4a^2t^2}d\xi, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{\xi-x}{2a^2t}d\xi, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\left[-\frac{1}{2a^2t}+\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}\right]d\xi. \tag{3}$$

先考察(1)式中的积分.

由于对 $|x|\leqslant x_0, 0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$ (x_0,t_0,t_1 任意固定), 当 $|\xi|>x_0$ 时, 有

$$\left|f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}\right|\leqslant|f(\xi)|e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}}\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_0^2},$$

而

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}}\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_0}=0,$$

故当 $|\xi|>x_0$ 时, 有

$$\left|f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}\right|\leqslant M|f(\xi)|,$$

其中 M 是某常数. 于是, 根据 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi<+\infty$, 由魏尔斯特拉斯准则知, (1)式中的积分在 $|x|\leqslant x_0, 0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上一致收敛.

同理可证, (2)式中的积分和(3)式中的积分都在 $|x|\leqslant x_0, 0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上一致收敛. 于是, 在其上可应用莱布尼茨法则在积分号下求导数, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t}-1\right]d\xi, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2at\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{\xi-x}{2a^2t}d\xi, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t}-1\right]d\xi. \tag{6}$$

由 x_0,t_0,t_1 的任意性知, (4)、(5)、(6)三式对一切 $-\infty<x<+\infty, t>0$ 都成立. 根据(4)式及(6)式, 即得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(-\infty<x<+\infty,t>0).$$

下面证明

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty). \tag{7}$$

任意固定 x, 易知($t>0$, 作变量代换 $u=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=2a\sqrt{t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=2a\sqrt{\pi t},$$

故

$$u(x,t)-f(x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\xi)-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

任给 $\varepsilon>0$. 根据 $f(x)$ 在点 x 的连续性, 可取某 $\delta>0$, 使当 $|\xi-x|\leqslant\delta$ 时, 恒有 $|f(\xi)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 我们有

$$u(x,t)-f(x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^{x+\delta}+\int_{x+\delta}^{+\infty}\right)[f(\xi)-f(x)]\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi=I_1+I_2+I_3.$$

下面分别估计 I_1,I_2 与 I_3,我们有

$$|I_2|=\left|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x-\delta}^{x+\delta}[f(\xi)-f(x)]\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\right|<\frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\right)$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\right)=\frac{\varepsilon}{3}.$$

又有

$$|I_3|=\left|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}[f(\xi)-f(x)]\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi+\frac{|f(x)|}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi+\frac{|f(x)|}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,$$

由此可知 $\lim\limits_{t\to+0}I_3=0$. 同理可证 $\lim\limits_{t\to+0}I_1=0$. 于是,存在 $\eta>0$,使当 $0<t<\eta$ 时,恒有

$$|I_3|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad |I_1|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由此,当 $0<t<\eta$ 时,恒有 $$|u(x,t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

故(7)式成立,证毕.

*) **作者注**:本题原书把 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 误写为 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. 另外原书只假定 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积,这是不够的. 应加上假定 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 否则,结论 $\lim\limits_{t\to+0}u(x,t)=f(x)$ 就可能不成立了. 例如,令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$$

则显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 绝对可积. 这时

$$u(x,t)\equiv 0\quad (t>0,-\infty<x<+\infty),$$

故 $\lim\limits_{t\to+0}u(0,t)=0\neq 1=f(0)$.

§4. 欧拉积分

1° **Γ函数** 当 $x>0$ 有:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Γ一函数的基本性质由下面的递推公式表达: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

若 n 为正整数,则

$$\Gamma(n)=(n-1)\,!;\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2° **延拓公式** 当 x 不等于整数时有:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

此公式可用来求自变量为负值的Γ函数.

3° **B函数** 当 $x>0$ 及 $y>0$ 时有:

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

成立公式
$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

【3841】 证明：Γ 函数 $\Gamma(x)$ 在区域 $x>0$ 内连续，并且有各阶连续导数.

证
$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,$$

当 $x\geqslant x_0>0$ 时，$0<t^{x-1}e^{-t}\leqslant t^{x_0-1}e^{-t}(0<t<1)$，而 $\int_0^1 t^{x_0-1}e^{-t}dt$ 收敛，故 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 当 $x\geqslant x_0$ 时一致收敛；又当 $x\leqslant x_1$ 时，$t^{x-1}e^{-t}\leqslant t^{x_1-1}e^{-t}(t\geqslant 1)$，而 $\int_1^{+\infty}t^{x_1-1}e^{-t}dt$ 收敛，故当 $x\leqslant x_1$ 时 $\int_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ 一致收敛. 由此可知，积分 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ 当 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 时一致收敛. 因此，$\Gamma(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上连续. 由 x_0 及 $x_1(x_1>x_0>0)$ 的任意性，即知 $\Gamma(x)$ 在整个区域 $x>0$ 上连续.

考虑积分
$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t})dx=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt+\int_1^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt.$$

当 $x\geqslant x_0>0$ 时，$|t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}|\leqslant t^{x_0-1}|\ln t|(0<t\leqslant 1)$，而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}|\ln t|dt$ 收敛（这是因为 $\lim\limits_{t\to+0}t^{1-\frac{x_0}{2}}\cdot t^{x_0-1}|\ln t|=\lim\limits_{x\to+0}(-t^{\frac{x_0}{2}}\ln t)=0$），故积分 $\int_0^1 t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt$ 当 $x\geqslant x_0>0$ 时一致收敛. 同样，当 $x\leqslant x_1$ 时，$|t^{x-1}\cdot\ln t\cdot e^{-t}|\leqslant t^{x_1}e^{-t}(t\geqslant 1)$，这是因为 $t\geqslant 1$ 时 $0\leqslant\ln t<t$，而积分 $\int_1^{+\infty}t^{x_1}e^{-t}dt$ 收敛，故积分 $\int_1^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt$ 当 $x\leqslant x_1$ 时一致收敛. 因此，积分 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt$ 当 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 时一致收敛. 由此可知 $\Gamma(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上具有连续导数 $\Gamma'(x)$，且可在积分号下求导数，得
$$\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt. \tag{1}$$

由 x_0,x_1 的任意性可知，$\Gamma'(x)$ 在 $x>0$ 上连续，且(1)式对一切 $x>0$ 皆成立.

完全类似地，可证 $\Gamma''(x)$ 在 $x>0$ 上连续，且可在(1)式积分号下求导数. 一般地，由数学归纳法可知，对任何正整数 n，$\Gamma^{(n)}(x)$ 在 $x>0$ 上都存在连续，并且可在积分号下求导数，得
$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}(\ln t)^n e^{-t}dt\quad(x>0).$$

【3842】 证明：B 函数 $B(x,y)$ 在区域 $x>0,y>0$ 内连续，并且有各阶连续导数.

证 由于当 $x\geqslant x_0>0,y\geqslant y_0>0$ 时，恒有
$$0<t^{x-1}(1-t)^{y-1}\leqslant t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}\quad(0<t<1),$$

而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}$ 收敛，故积分 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ 在 $x\geqslant x_0,y\geqslant y_0$ 上一致收敛，从而，$B(x,y)$ 是 $x\geqslant x_0,y\geqslant y_0$ 上的二元连续函数. 由 $x_0>0,y_0>0$ 的任意性知，$B(x,y)$ 在整个区域 $x>0,y>0$ 上连续.

考虑积分
$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}[t^{x-1}(1-t)^{y-1}]dt=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t dt.$$

由于当 $x\geqslant x_0>0,y\geqslant y_0>0$ 时，恒有
$$|t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t|\leqslant t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|\quad(0<t<1),$$

而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|dt$ 收敛

（因为
$$\lim_{t\to+0}t^{1-\frac{x_0}{2}}t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|=-\lim_{t\to+0}t^{\frac{x_0}{2}}\ln t=0,$$
$$\lim_{t\to1-0}(1-t)^{1-\frac{y_0}{2}}\cdot t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|=-\lim_{t\to1-0}(1-t)^{\frac{y_0}{2}}\ln t=0),$$

故积分 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t dt$ 当 $x\geqslant x_0,y\geqslant y_0$ 时一致收敛. 因此，当 $x\geqslant x_0,y\geqslant y_0$，时可在积分号下对 x 求导

数，得

$$B'_x(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\,dt, \tag{1}$$

并且 $B'_x(x,y)$ 是 $x\geqslant x_0, x\geqslant y_0$ 上的连续函数. 由 $x_0>0, y_0>0$ 的任意性知，(1)式对一切 $x>0, y>0$ 皆成立，并且 $B'_x(x,y)$ 是区域 $x>0, y>0$ 上的二元连续函数. 同理可证 $B'_y(x,y)$ 是区域 $x>0, y>0$ 上的二元连续函数，并且 $x>0, y>0$ 时，可在积分号下对 y 求导数，得

$$B'_y(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln(1-t)\,dt.$$

完全类似地，利用数学归纳法，可证 $\frac{\partial^n B(x,y)}{\partial x^i\partial y^{n-i}}$ 在区域 $x>0, y>0$ 上存在连续，并且

$$\frac{\partial^n B(x,y)}{\partial x^i\partial y^{n-i}}=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ln t)^i[\ln(1-t)]^{n-i}\,dt.$$

利用欧拉积分计算下列积分：

【3843】 $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx.$

解 $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}=\frac{\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2!}.$

由于

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi,$$

故 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. 于是，$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}$.

【3844】 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0).$

解 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int_0^a\left(\frac{x}{a}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,d\left(\frac{x}{a}\right)=a^4\int_0^1 u^2(1-u^2)^{\frac{1}{2}}du$

$=\frac{a^4}{2}\int_0^1 u(1-u^2)^{\frac{1}{2}}d(u^2)=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi a^4}{16}.$

【3845】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx.$

提示 令 $\frac{x}{1+x}=t$.

解 设 $\frac{x}{1+x}=t$，则 $x=\frac{t}{1-t}$, $dx=\frac{1}{(1-t)^2}dt$，代入即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

【3846】 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}.$

提示 令 $x^3=t$ 后，再令 $\frac{t}{1+t}=u$.

解 设 $x^3=t$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}dt$. 再作代换 $\frac{t}{1+t}=u$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int_0^1 u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{1}{3}}du=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

【3847】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{1+x^4}$.

提示 令 $x^4=t$ 后，再令$\frac{t}{1+t}=u$.

解 设 $x^4=t$，则$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t}dt$. . 再作代换$\frac{t}{1+t}=u$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int_0^1 u^{-\frac{1}{4}}(1-u)^{-\frac{3}{4}}du=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{4}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

【3848】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x\cos^4x\,dx$.

提示 令 $\sin x=t$ 后，再令 $t=\sqrt{u}$.

解 设 $t=\sin x$，则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x\cos^4x\,dx=\int_0^1 t^6(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$. 再作代换 $t=\sqrt{u}$，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x\cos^4x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{5}{2}}(1-u)^{\frac{3}{2}}du=\frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{5!}=\frac{3\pi}{512}.$$

【3849】 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}\quad(n>0)$.

提示 令 $x^n=t$.

解 设 $x^n=t$，即得

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt=\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

【3850】 $\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$ （n 为正整数）.

提示 令 $x=\sqrt{t}$.

解 $\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^{2n-1}e^{-x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{2n-1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

求下列积分的存在域，并用欧拉积分表示这些积分：

【3851】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx\quad(n>0)$.

提示 令 $x^n=t$ 后，再令$\frac{t}{1+t}=u$，易知积分的存在域为 $0<m<n$，且结果为$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$.

解 令 $x^n=t$，再令$\frac{t}{1+t}=u$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}dt=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}-1}(1-u)^{\frac{n-m}{n}-1}du,$$

此积分的存在域为$\frac{m}{n}>0$ 及$\frac{n-m}{n}>0$，即 $0<m<n$. 此时，我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx=\frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n},\frac{n-m}{n}\right)=\frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

【3852】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx$.

提示 令$\frac{x}{1+x}=t$，易知积分的存在域为 $0<m<n$，且结果为 $B(m,n-m)$.

解 设 $\frac{x}{1+x}=t$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-m-1}dt=B(m,n-m),$$

存在域为 $m>0$ 及 $n-m>0$，即 $0<m<n$.

【3853】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}\quad(a>0,b>0,n>0)$.

提示 令$\frac{bx^n}{a+bx^n}=t$，易知积分的存在域为 $0<\frac{m+1}{n}<p$，且结果为

$$\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}B\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right).$$

解 设 $\frac{bx}{a+bx^n}=t$，则有

$$x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(1-t)^{\frac{1}{n}+1}}dt,$$

代入即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{(a+bx^n)^p}dx=\frac{1}{b^p}\int_0^{+\infty}\left(\frac{bx^n}{a+bx^n}\right)^p x^{m-np}dx=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int_0^1 t^{\frac{m+1}{n}-1}(1-t)^{p-\frac{m+1}{n}-1}dt$$

$$=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}B\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right),$$

存在域为 $\frac{m+1}{n}>0$ 及 $p-\frac{m+1}{n}>0$，即 $0<\frac{m+1}{n}<p$.

【3854】 $\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}dx$.

提示 令$\frac{b+c}{b-a}\cdot\frac{x-a}{x+c}=t$，易知积分的存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$，且结果为

$$\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}B(m+1,n+1).$$

解 设$\frac{b+c}{b-a}\cdot\frac{x-a}{x+c}=t$，则 $x=\frac{a+lct}{1-lt}$，其中 $l=\frac{b-a}{b+c}$，且

$$x-a=\frac{(a+c)lt}{1-lt},\quad x-b=\frac{(a-b)+(b+c)lt}{1-lt},\quad x+c=\frac{a+c}{1-lt},\quad dx=\frac{(a+c)l}{(1-lt)^2}dt.$$

代入即得

$$\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}dx=(-1)^n\frac{l^{m+1}}{(a+c)^{n+1}}\int_0^1 t^m[(a-b)+(b+c)lt]^n dt$$

$$=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\int_0^1 t^m(1-t)^n dt=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}B(m+1,n+1),$$

存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$.

【3855】 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}\quad(m>0)$.

解 设 $x^m=t$，即得 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}=\frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt=\frac{1}{m}B\left(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\right)$,

存在域为 $1-\frac{1}{n}>0$，即 $n<0$ 或 $n>1$.

【3856】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$.

提示 令 $\sin x=t$ 后，再令 $t^2=u$，易知积分的存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$，且结果为

$$\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

解 令 $\sin x=t$，再令 $t^2=u$，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx=\int_0^1 t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}du=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),$$

存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$.

【3857】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\,dx$.

提示 令 $\sin x=t$ 后，再令 $t^2=u$，易知积分的存在域为 $|n|<1$，且结果为 $\dfrac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$.

解 令 $\sin x=t$，再令 $t^2=u$，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\,dx=\int_0^1 t^n(1-t^2)^{-\frac{n+1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{n-1}{2}}(1-u)^{-\frac{n+1}{2}}du=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1-n}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin\frac{n+1}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}},$$

存在域为 $\frac{n+1}{2}>0$ 及 $\frac{1-n}{2}>0$，即 $|n|<1$.

【3858】 $\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx\quad(0<|k|<1)$.

解 设 $\tan\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\tan\frac{x}{2}$，则有 $\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\tan\frac{t}{2}$，利用三角恒等式，可得

$$\sin x=\frac{\sqrt{1-k^2}\sin t}{1-k\cos t},\quad \cos x=\frac{\cos t-k}{1-k\cos t},\quad 1+k\cos x=\frac{1-k^2}{1-k\cos t},\quad dx=\frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k\cos t}dt,$$

代入即得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx=(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\pi}\sin^{n-1}t\,dt=2^{n-1}(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\pi}\sin^{n-1}\frac{t}{2}\cos^{n-1}\frac{t}{2}dt.$$

在上式右端的最后一个积分中，依次作代换 $\sin\frac{t}{2}=u$，$u^2=y$，即得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx=2^{n-1}(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}\int_0^1 2u^{n-1}(1-u^2)^{\frac{n-2}{2}}du=2^{n-1}(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}\int_0^1 y^{\frac{n-2}{2}}(1-y)^{\frac{n-2}{2}}dy$$

$$=2^{n-1}(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right),$$

存在域为 $n>0$.

【3859】 $\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx\quad(n>0)$.

解 设 $x^n=t$，即得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$，

存在域为 $\frac{1}{n}>0$，即 $n>0$.

【3860】 $\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx$.

解 当 $n>0$ 时，作代换 $x^n=t$，则得

$$\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right);$$

当 $n<0$ 时，仍作代换 $x^n=t$，则得

$$\int_0^{+\infty}x^m e^{-x}dx=\frac{1}{n}\int_{+\infty}^0 t^{\frac{m+1}{n}}e^{-t}dt=-\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

将上式结果合并，即得：当 $n\neq 0$ 时，

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right);$$

当 $n=0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} x^m e^{-1} dx$. 显然发散. 因此，积分 $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx$ 的存在域为$\frac{m+1}{n}>0$.

【3861】 $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

提示 令 $x=e^{-t}$，易知积分的存在域为 $p>1$，且结果为 $\Gamma(p+1)$.

解 设 $x=e^{-t}$，即得

$$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx=-\int_{+\infty}^0 t^p e^{-t} dt=\int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt=\Gamma(p+1),$$

存在域为 $p>-1$

【3862】 $\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (a>0)$.

解 由 3841 题的证明过程可知，积分 $\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx$

关于 p 在 $-1<p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时一致收敛. 因此，当 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} dx=\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx.$$

但是，
$$\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} dx=\frac{1}{a^{p+1}}\int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt=\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}},$$

故
$$\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx=\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right] \quad (p_0\leqslant p\leqslant p_1).$$

由 $-1<p_0<p_1$ 的任意性，即知上式对一切 $p>-1$ 均成立.

【3863】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx \quad (p>0)$.

解 由 3852 题的结果知 $B(p,1-p)=\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad (0<p<1)$.

显然，所求积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx=\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{x^{p-1}}{1+x}\right) dx.$$

下证积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx=\int_0^1 \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx+\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx$$

在 $0<p_0\leqslant p\leqslant p_1<1$ 上一致收敛. 事实上，此时

$$\left|\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\right|\leqslant\frac{x^{p_0-1}|\ln x|}{1+x} \quad (0<x\leqslant 1),$$

而积分 $\int_0^1 \frac{x^{p_0-1}|\ln x|}{1+x} dx$ 收敛（因为 $\lim\limits_{x\to+0} x^{1-\frac{p_0}{2}}\frac{x^{p_0-1}|\ln x|}{1+x}=\lim\limits_{x\to+0}(-x^{\frac{p_0}{2}}\ln x)=0$），

故积分 $\int_0^1 \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx$ 当 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时一致收敛. 另一方面，当 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时，有

$$0\leqslant\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\leqslant\frac{x^{p_1-1}\ln x}{1+x}\leqslant x^{p_1-2}\ln x \quad (x\geqslant 1),$$

而积分 $\int_1^{+\infty} x^{p_1-2}\ln x dx$ 收敛（因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1+\frac{1}{2}(1-p_1)} x^{p_1-2}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{2}(1-p_1)}\ln x=0$），

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx$ 当 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时一致收敛. 由此可知，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx$ 当 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时一致收敛. 从而，当$p_0\leqslant p\leqslant p_1$时，可在积分号下求导数，得

$$\frac{d}{dp}B(p,1-p)=\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx.$$

由 p_0，p_1，的任意性知，上式对一切 $0<p<1$ 皆成立. 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)=-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}\quad(0<p<1),$$

故最后得
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}\quad(0<p<1).$$

【3864】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x\quad(p>0).$

解 在 3863 题的基础上，考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x.$$

仿 3863 题的证明过程，可证积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x$ 当 $0<p_0\leqslant p\leqslant p_1<1$ 时一致收敛，从而，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ 可在积分号下对 p 求导数两次（当 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时），得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left(\frac{\pi}{\sin^2 p\pi}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}\right)=\frac{\pi^3(1+\cos^2 p\pi)}{\sin^3 p\pi}$$

由 p_0，p_1 的任意性知，此式对一切 $0<p<1$ 皆成立.

【3865】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\mathrm{d}x.$

解 易知，当 $0<p<1$，$0<q<1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\mathrm{d}x$ 收敛. 事实上，设 $p<q$，则由

$$\lim_{x\to+0}x^{1-p}\left|\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\right|=\lim_{x\to+0}\left|\frac{1-x^{q-p}}{(1+x)\ln x}\right|=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{2-q}\left|\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\right|=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^{1-(q-p)}-x}{(1+x)\ln x}\right|=0$$

即知. 考虑积分
$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\mathrm{B}(p,1-p)^{*)}=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

易知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ 当 $0<p_0\leqslant p\leqslant p_1<1$ 时一致收敛（事实上，这时

$$0<\frac{x^{p-1}}{1+x}\leqslant\frac{x^{p_0-1}}{1+x}\quad(0<x\leqslant1),\qquad 0<\frac{x^{p-1}}{1+x}\leqslant\frac{x^{p_1-1}}{1+x}\quad(1\leqslant x<+\infty)$$

而积分 $\int_0^{1}\frac{x^{p_0-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p_1-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ 都收敛），故当 $0<p_0\leqslant p\leqslant p_1<1$ 时，可在积分号下对 p 求导数，得

$$I'(p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},\tag{1}$$

其中 $I(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\mathrm{d}x$（$q$ 固定，$0<q<1$）.

由 p_0，p_1 的任意性知，(1)式对一切 $0<p<1$ 均成立. 两端积分，得

$$I(p)=\ln\left|\tan\frac{p\pi}{2}\right|+C\quad(0<p<1),$$

其中 C 是某常数. 在上式中令 $p=q$，并注意到 $I(q)=0$，即得 $0=I(q)=\ln\left|\tan\frac{q\pi}{2}\right|+C$，故 $C=-\ln\left|\tan\frac{q\pi}{2}\right|$.

由此可知
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\mathrm{d}x=I(p)=\ln\left|\frac{\tan\frac{p\pi}{2}}{\tan\frac{q\pi}{2}}\right|\quad(0<p<1,0<q<1)$$

*） 利用 3852 题的结果.

【3866】 $\int_0^{1}\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\mathrm{d}x\quad(0<p<1).$

提示 所给积分可看作求下列极限：$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}[\mathrm{B}(\phi,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-\varphi,\varepsilon)]$.

解 首先，由于 $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{(p-1)x^{p-2}+px^{-p-1}}{-1}=1-2p$，

故 $x=1$ 不是瑕点. 令 $p_0=\max\{p,1-p\}$，则 $0<p_0<1$. 取 $p_0<p_0^*<1$. 由于

$$\lim_{x\to+0}x^{p_0^*}\left|\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\right|=\lim_{x\to+0}\left|\frac{x^{p_0^*-(1-p)}-x^{p_0^*-p}}{1-x}\right|=0,$$

故积分 $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx$ 绝对收敛 $(0<p<1)$.

考察积分(含参变量 ε，$0\leqslant\varepsilon<1$) $\quad I(\varepsilon)=\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}dx$.

由于

$$\frac{|x^{p-1}-x^{-p}|}{(1-x)^{1-\varepsilon}}\leqslant\frac{|x^{p-1}-x^{-p}|}{1-x}\quad(0<x<1),$$

而上面已证积分 $\int_0^1\frac{|x^{p-1}-x^{-p}|}{1-x}dx$ 收敛，故积分 $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}dx$ 当 $0\leqslant\varepsilon<1$ 时一致收敛. 由此可知，$I(\varepsilon)$ 是 $0\leqslant\varepsilon<1$ 上的连续函数. 但是，显然当 $0<\varepsilon<1$ 时，有

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}dx=\mathrm{B}(p,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\varepsilon).$$

于是，由 $I(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 的(右)连续性，得

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx=I(0)=\lim_{\varepsilon\to+0}I(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to+0}[\mathrm{B}(p,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\varepsilon)].$$

根据 Γ 函数与 B 函数的关系以及 $\Gamma(x)$ 和 $\Gamma'(x)$ 在 $x>0$ 时的连续性，得

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to+0}[\mathrm{B}(p,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\varepsilon)]\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Gamma(\varepsilon)[\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)]}{\Gamma(p+\varepsilon)\Gamma(1-p+\varepsilon)}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\Gamma(p+\varepsilon)\Gamma(1-p+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}\lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)[\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)]\\&=\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)\Gamma(1)}\lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)[\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)]\\&=\sin\pi p\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)}{\sin\pi\varepsilon}\\&=\sin\pi p\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Gamma(p)\Gamma'(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma'(p+\varepsilon)}{\pi\cos\pi\varepsilon}\\&=\frac{\sin\pi p}{\pi}[\Gamma(p)\Gamma'(1-p)-\Gamma(1-p)\Gamma'(p)].\end{aligned}$$

但是，显然

$$\Gamma(p)\Gamma'(1-p)-\Gamma(1-p)\Gamma'(p)]=-\frac{d}{dp}[\Gamma(p)\Gamma(1-p)]=-\frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)=\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2p\pi},$$

故最后得

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx=\pi\cot p\pi\quad(0<p<1).$$

【3867】 $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}dx\quad(0<\alpha<\beta)$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}dx=-\frac{1}{2\beta}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(\alpha+\beta)x}-e^{(\beta-\alpha)x}}{1-e^{-2\beta x}}d(e^{-2\beta x})=-\frac{1}{2\beta}\int_1^0\frac{t^{-\frac{\alpha+\beta}{2\beta}}-t^{-\frac{\beta-\alpha}{2\beta}}}{1-t}dt$

$$=\frac{1}{2\beta}\int_0^1\frac{t^{\frac{\beta-\alpha}{2\beta}-1}-t^{-\frac{\beta-\alpha}{2\beta}}}{1-t}dt=\frac{\pi}{2\beta}\cot\frac{(\beta-\alpha)\pi}{2\beta}{}^{*)}=\frac{\pi}{2\beta}\tan\frac{\alpha\pi}{2\beta}.$$

*) 利用 3866 题的结果.

【3868】 $\int_0^1\ln\Gamma(x)dx$.

提示 令 $1-x=t$ 后，可得

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]dx,$$

并利用 2353 题(1)的结果.

解 设 $1-x=t$,则有 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx=\int_0^1 \ln\Gamma(1-t)dt=\int_0^1 \ln\Gamma(1-x)dx$.

相加即得

$$2\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx=\int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]dx=\int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}dx=\ln\pi-\int_0^1 \ln\sin\pi x dx$$

$$=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\sin t dt=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t dt\right]=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt$$

$$=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{*)}=\ln 2\pi.$$

于是, $$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx=\frac{1}{2}\ln 2\pi=\ln\sqrt{2\pi}.$$

*) 利用 2353 题(1)的结果.

【3869】 $\int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)dx \quad (a>0)$.

解 设 $$F(a)=\int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)dx=\int_0^{a+1} \ln\Gamma(x)dx-\int_0^a \ln\Gamma(x)dx,$$

则有 $$F'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}=\ln a.$$

两端积分,得 $$F(a)=a(\ln a-1)+C,$$

其中 C 为某常数. 让 $a\to+0$,得 $C=\ln\sqrt{2\pi}$ *). 于是,

$$\int_0^{a+1} \ln\Gamma(x)dx=a(\ln a-1)+\ln\sqrt{2\pi}.$$

*) 利用 3868 题的结果.

【3870】 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x dx$.

解 设 $x=1-t$,则有 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x dx=\int_0^1 \ln\Gamma(1-t)\sin\pi t dt=\int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\sin\pi x dx$.

相加即得

$$2\int_0^1\ln\Gamma(x)\sin\pi x dx=\int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x dx]=\int_0^1 \left(\ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\right)\sin\pi x dx$$

$$=\ln\pi\int_0^1 \sin\pi x dx-\int_0^1 \sin\pi x\ln\sin\pi x dx.$$

由于 $\int_0^1 \sin\pi x dx=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$ 及

$$\int_0^1 \sin\pi x\ln\sin\pi x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\ln\sin t dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\left[\ln 2+\ln\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)\right]dt$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^1 u\left[\ln 2+\ln u+\frac{1}{2}\ln(1-u^2)\right]du=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}u^2\ln 2+\frac{1}{2}u^2\left(\ln u-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\ln(1-u^2)d(1-u^2)\right]$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\int_0^1\ln t dt\right]=\frac{2}{\pi}\ln 2-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}(t\ln t-t)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\ln 2-\frac{2}{\pi},$$

故最后得

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x dx=\frac{1}{2}\ \frac{2}{\pi}\ln\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\ln 2-\frac{2}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right).$$

【3871】 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x dx$ (n 为正整数).

解 设 $x=1-t$,则有

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x dx=\int_0^1 \ln\Gamma(1-t)\cos 2n\pi t dt=\int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\cos 2n\pi x dx.$$

等式两端同加 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x$，得

$$2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (\ln\pi-\ln\sin\pi x)\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 \cos 2n\pi x\ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2nt\ln\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\sin 2nt\ln\sin t\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4n\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{4n\pi}(\pi+\pi)^{*)}=\frac{1}{2n}.$$

于是，
$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4n}.$$

*） 利用 2291 题的结果.

证明等式：

【3872】 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}$.

证明思路 首先，将积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x$ $(p>0,q>0,m>0)$ 表成 Γ 函数（令 $x^m=t$）

$$\frac{1}{m}\frac{\Gamma(\frac{p}{m})\Gamma(q)}{\Gamma(\frac{p}{m}+q)}.$$

其次，利用上述结果，即可证明等式.

证 首先，我们将积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x$ $(p>0,q>0,m>0)$
表成 Γ 函数. 作代换 $x^m=t$，即得

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}u=\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{p}{m},q\right)=\frac{1}{m}\frac{\Gamma(\frac{p}{m})\Gamma(q)}{\Gamma(\frac{p}{m}+q)}.$$

利用此结果，即可证得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4^2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4^2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{\pi}{4}.$$

【3873】 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

证明思路 首先，将积分 $\int_0^{+\infty} x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$ $(m>0,n>0)$ 表成 Γ 函数（令 $x^n=t$）$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$. 其次，利用上述结果，即可证明等式.

证 首先，我们将积分

$$\int_0^{+\infty} x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\quad(m>0,n>0)$$

表成 Γ 函数. 作代换 $x^n=t$，即得

$$\int_0^{+\infty} x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

利用此结果，即可证得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4^2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

【3874】 $\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}dx=\left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$.

证 利用 3873 题证明过程的一个结果，即得

$$\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}dx=\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^n\prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right).$$

令 $E=\prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)=\prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)$，则

$$E^2=\prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)=\prod_{m=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{\pi^{n-1}}{\prod_{m=1}^{n-1}\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

由于

$$\frac{z^n-1}{z-1}=\prod_{m=1}^{n-1}\left(z-\cos\frac{2m\pi}{n}-\mathrm{i}\ \sin\frac{2m\pi}{n}\right),$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$. 让 $z\to1$，取极限即得

$$n=\prod_{m=1}^{n-1}\left|1-\cos\frac{2m\pi}{n}-\mathrm{i}\ \sin\frac{2m\pi}{n}\right|=2^{n-1}\prod_{m=1}^{n-1}\sin\frac{m\pi}{n},$$

故有

$$\prod_{m=1}^{n-1}\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

从而得

$$\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}dx=\left(\frac{1}{n}\right)^nE=\frac{1}{n^n}\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

【3875】 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$.

提示 令 $x^n=t$，并利用式 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 及 3841 题的结果.

解 $\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$.

由 3841 题知，$\Gamma(x)$ 当 $x>0$ 时是连续函数，故得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)=\Gamma(1)=1.$$

利用等式 $\frac{1}{x^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}t^{m-1}e^{-xt}dt$ $(x>0)$，求积分：

【3876】 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^m}dx\quad(0<m<1)$.

解 我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^m}dx=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}\cos ax dx\int_0^{+\infty}t^{m-1}e^{-xt}dt=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}t^{m-1}dt\int_0^{+\infty}e^{-xt}\cos ax dx^{*)}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}t^{m-1}\frac{t}{a^2+t^2}dt=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\tan u)^m\frac{1}{a^2\sec^2u}a\sec^2u du=\frac{a^{m-1}}{\Gamma(m)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^m u du$$

$$=\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}^{**)}\quad(a>0).$$

*) 交换积分顺序的合理性证明如下：令

$$f(x,t)=\cos ax\cdot t^{m-1}e^{-xt}\quad(0<m<1,a>0).$$

对任何 $A>0$，我们有

$$\int_0^A dx\int_0^{+\infty}|f(x,t)|dt\leqslant\int_0^A dx\int_0^{+\infty}t^{m-1}e^{-xt}dt=\Gamma(m)\int_0^A\frac{dx}{x^m}<+\infty,$$

故对于 $\int_0^A dx\int_0^{+\infty}f(x,t)dt$ 可交换积分顺序，得

$$\int_0^A dx\int_0^{+\infty}f(x,t)dt=\int_0^{+\infty}dt\int_0^A f(x,t)dx.\tag{1}$$

但是

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^A f(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}t^{m-1}\mathrm{d}t\int_0^A \mathrm{e}^{-tx}\cos\alpha x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}t^{m-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-At}(a\sin aA-t\cos aA)}{a^2+t^2}+\frac{t}{a^2+t^2}\right]\mathrm{d}t, \quad (2)$$

而

$$\left|\frac{a\sin aA-t\cos aA}{a^2+t^2}\right|\leqslant\frac{a+t}{a^2+t^2}\leqslant M \quad (0<t<+\infty),$$

其中 M 是某常数,故

$$\int_0^{+\infty}\left|t^{m-1}\frac{\mathrm{e}^{-At}(a\sin aA-t\cos aA)}{a^2+t^2}\right|\mathrm{d}t\leqslant M\int_0^{+\infty}t^{m-1}\mathrm{e}^{-At}\mathrm{d}t=\frac{M}{A^m}\int_0^{+\infty}y^{m-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{M\Gamma(m)}{A^m}.$$

由此可知

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{+\infty}t^{m-1}\frac{\mathrm{e}^{-At}(a\sin aA-t\cos aA)}{a^2+t^2}\mathrm{d}t=0.$$

再注意到积分 $\int_0^{+\infty}t^{m-1}\frac{t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$ 收敛,在(2)式两端令 $A\to+\infty$ 取极限,得

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^A f(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}t^{m-1}\frac{t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t;$$

但是,

$$\int_0^{+\infty}t^{m-1}\frac{t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^{m-1}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\cos ax\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x.$$

于是,在(1)式两端令 $A\to+\infty$ 取极限(由于右端极限存在,故左端极限也存在),得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x.$$

**) 利用 3857 题的结果.

【3877】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^m}\mathrm{d}x \quad (0<m<2).$

解 我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^m}\mathrm{d}x=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}\sin ax\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}t^{m-1}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}t^{m-1}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\sin ax\mathrm{d}x^{*)}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}t^{m-1}\frac{a}{a^2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{a^{m-1}}{\Gamma(m)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{m-1}u\mathrm{d}u=\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m-1}{2}\pi}=\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}} \quad (a>0).$$

*) 交换积分顺序的合理性可仿 3876 题证明之,只要注意到 $|\sin ax|\leqslant ax$ $(a>0,x>0)$. 于是,当 $0<m<2$时,对任何 $A>0$,有

$$\int_0^A\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}|\sin ax\cdot t^{m-1}\mathrm{e}^{-xt}|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^A\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}ax\,t^{m-1}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t=a\Gamma(m)\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{x^{m-1}}<+\infty.$$

【3878】 证明欧拉公式:

(i) $\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x;$

(ii) $\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x \quad (\lambda>0,x>0,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}).$

证 由于当 $0<t<+\infty$时,

$$|t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)|\leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha},$$

而(作代换 $\lambda t\cos\alpha=u$)

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\mathrm{d}t=\frac{1}{(\lambda\cos\alpha)^x}\int_0^{+\infty}u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{\Gamma(x)}{(\lambda\cos\alpha)^x}<+\infty,$$

故积分 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t$ 收敛. 同理可证积分 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t$ 也收敛. 令(固定 $\lambda>0$, $x>0$)

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t \quad (-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}),$$

$$I_1(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)]=\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}[\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)-\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)],$$

故当 $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 时,恒有

$$|t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}[\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)-\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)]|\leqslant 2t^x e^{-\lambda t\cos\alpha},$$

而

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x+1)}{(\lambda\sin\varepsilon)^{x-1}}<+\infty,$$

故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}[t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)]\mathrm{d}t$$

在 $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 上一致收敛.于是,可在积分号下求导数,得(当 $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 时)

$$\begin{aligned}
I'(\alpha)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}[t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)]\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{+\infty}\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}[\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)-\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)]\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{+\infty}t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\mathrm{d}[\sin(\lambda t\sin\alpha)]+\int_0^{+\infty}t^x\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}[e^{-\lambda t\cos\alpha}]\\
&=t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}[t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}]+t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\Big|_0^{+\infty}\\
&\quad-\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t\cos\alpha}\mathrm{d}[t^x\sin(\lambda t\sin\alpha)]\\
&=-\int_0^{+\infty}xt^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}xt^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t\\
&\quad-\int_0^{+\infty}\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t\\
&=-2x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}[\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)-\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t]\\
&=-2xI_1(\alpha)-I'(\alpha),
\end{aligned}$$

故(当 $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 时)

$$I'(\alpha)=-xI_1(\alpha). \tag{1}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知,(1)式对一切 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 皆成立.同理可证

$$I_1'(\alpha)=xI(\alpha) \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

由(1)式与(2)式,得

$$I''(\alpha)+x^2I(\alpha)=0 \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

解此微分方程,得

$$I(\alpha)=C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right), \tag{3}$$

其中 C_1,C_2 是两个常数.在(3)式中令 $\alpha=0$,得

$$C_1=I(0)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}.$$

又在(1)式中令 $\alpha=0$,得

$$I'(0)=-xI_1(0). \tag{4}$$

但是,根据(3)式

$$I'(0)=I'(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=(C_1 x\sin\alpha x+C_2 x\cos\alpha x)\Big|_{\alpha=0}=C_2 x,$$

又显然知 $I_1(0)=0$；故由(4)式得 $C_2=0$. 于是，最后得

$$I(\alpha)=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x;\quad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right),$$

$$I_1(\alpha)=-\frac{1}{x}I'(\alpha)=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x\quad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

证毕

【3879】 求曲线 $r^n=a^n\cos n\varphi$ （$a>0$，n 为正整数）的弧长.

提示 注意所求的弧长为 $s=2n\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi$，并利用 3856 题的结果.

解 所求的弧长为

$$s=2n\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi=2na\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\cos^{\frac{1}{n}-1}n\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{n}-1}t\,\mathrm{d}t=a\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right)^{*)}.$$

*） 利用 3856 题的结果.

【3880】 求由曲线 $|x|^n+|y|^n=a^n$ （$n>0$，$a>0$）所围的面积.

解 所求的面积为

$$A=4\int_0^a(a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=\frac{4a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t=\frac{4a^2}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1\right)=\frac{4a^2}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}+1\right)}$$

$$=\frac{2a^2}{n}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

§5. 傅里叶积分公式

1° **用傅里叶积分表示函数** 若 1)函数 $f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内有定义；2)在每一个有限区间内此函数和它的导数 $f'(x)$ 皆是分段连续；3) $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积，则在函数连续的一切点，可把函数表示成傅里叶积分的形式：

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda,\tag{1}$$

式中 $$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi\quad 及\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

在函数 $f(x)$ 不连续的各点，公式(1)的左端应改为 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

对于偶函数 $f(x)$，公式(1)给出：

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda.\tag{2}$$

其中 $$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

并且对不连续的点也有同样的说明.

类似地，对于奇函数 $f(x)$ 可得：

$$f(x)=\int_0^{+\infty}b(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda,\tag{3}$$

其中 $$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

2° **在区间 $(0,+\infty)$ 内用傅里叶积分表示函数** 若 1)函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有定义，2)此函数及

其导数 $f'(x)$ 在每一个有限区间 $(a,b)\subset(0,+\infty)$ 内皆是分段连续，3) $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内绝对可积，则在该区间内可按我们的愿望用公式(2)(偶式延拓)或用公式(3)(奇式延拓)来表示出函数 $f(x)$.

用傅里叶积分表示下列函数:

【3881】 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

提示 易知函数 $f(x)$ 满足傅里叶积分展式成立的条件，且当 $|x|\neq 1$ 时，有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda;$$

而当 $|x|=1$ 时，有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}$$

(此结果由 3812 题的结果也容易获得).

解 由于函数 $f(x)$ 在 $|x|\neq 1$ 上有定义，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在任何有限区间上皆分段连续，特别是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积，故可将 $f(x)$ 表成傅里叶积分的形式(以下各题如不加说明，均满足傅里叶积分展式成立的条件). 又由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $b(\lambda)=0$，且

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}.$$

于是，当 $|x|\neq 1$ 时($|x|\neq 1$ 为 $f(x)$ 的连续点)，有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda;$$

而当 $|x|=1$ 时为不连续点，由于

$$\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{1}{2},\qquad \frac{f(-1+0)+f(-1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

故有 $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}$ *).

*) 此结果由 3812 题的结果也容易获得. 事实上，

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin2\lambda}{\lambda}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.$$

【3882】 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

解 由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $a(\lambda)=0$，且

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}.$$

于是，当 $0<|x|\neq 1$ 时为连续点，有 $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$,

当 $x=0$ 时，虽为不连续点，但由于 $\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=0$, $f(0)=0$，且右端积分显然为零，故上式仍成立.

而当 $|x|=1$ 时为不连续点，由于

$$\frac{f(-1+0)+f(-1-0)}{2}=-\frac{1}{2},\quad \frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

故有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda\operatorname{sgn}x\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x\ ^{*)}.$$

*) 此结果由 3812 题的结果也容易获得. 事实上，

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}x\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}x\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin2\lambda}{\lambda}\mathrm{d}\lambda\right)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}x\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x.$$

【3883】 $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)\quad(b>a)$.

解 $a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\pi}\int_a^b 2\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2(\sin b\lambda-\sin a\lambda)}{\pi\lambda}$,

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b} 2\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2(\cos a\lambda-\cos b\lambda)}{\pi\lambda},$$

于是，
$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x-a)-\sin\lambda(x-b)}{\lambda}\mathrm{d}\lambda,$$

当 $x=a$ 或 b 时，$f(x)=1$，而 $\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}=1$ 及 $\frac{f(b+0)+f(b-0)}{2}=1$，故上式对于不连续点 a 和 b 也成立.

【3884】 $f(x)=\begin{cases} h\left(1-\frac{|x|}{a}\right), & |x|\leqslant a, \\ 0, & |x|>a. \end{cases}$

解 由于 $f(x)$ 为偶函数，故
$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2h}{\pi}\int_{0}^{a}\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2h(1-\cos a\lambda)}{\pi a\lambda^{2}}.$$

于是，
$$f(x)=\frac{2h}{\pi a}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^{2}}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$f(x)$ 处处连续，故不再讨论点 $x=\pm a$，以下各题类似，不再一一加以说明.

【3885】 $f(x)=\frac{1}{a^{2}+x^{2}} \quad (a>0)$.

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数，且绝对可积：
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{a}<+\infty,$$

故
$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\lambda\xi}{a^{2}+\xi^{2}}\mathrm{d}\xi=\frac{2}{a\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\lambda a x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{a\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a|\lambda|\,*)}=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-a|\lambda|}.$$

于是，
$$f(x)=\frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda \quad 或 \quad \frac{1}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda \quad (-\infty<x<+\infty).$$

*） 利用 3825 题的结果.

【3886】 $f(x)=\frac{x}{a^{2}+x^{2}} \quad (a>0)$.

解题思路 注意 $f(x)$ 为连续的奇函数，利用 3826 题的结果，易得 $b(\lambda)=\mathrm{e}^{-a|\lambda|}$. 但是，由于 $f(x)$ 不绝对可积，故我们不能根据傅里叶积分的理论来断定展式
$$\frac{x}{a^{2}+x^{2}}=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda \quad (-\infty<x<+\infty)$$

成立，而利用 1829 题的结果，我们可以直接验证上述展式是成立的.

解 $f(x)$ 是连续的奇函数，故
$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\xi\sin\lambda\xi}{a^{2}+\xi^{2}}\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin a\lambda x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a|\lambda|\,*)}=\mathrm{e}^{-a|\lambda|}.$$

但我们不能根据傅里叶积分的理论来断定展式
$$\frac{x}{a^{2}+x^{2}}=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda \quad (-\infty<x<+\infty) \tag{1}$$

成立，这是因为函数 $f(x)=\frac{x}{a^{2}+x^{2}}$ 不是绝对可积的：
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{x}{a^{2}+x^{2}}\right|\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{a^{2}+x^{2}}\mathrm{d}x=\ln(a^{2}+x^{2})\bigg|_{0}^{+\infty}=+\infty.$$

但是，我们可以直接验证展式(1)是成立的. 事实上，我们有
$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{\mathrm{e}^{a\lambda}(-a\sin\lambda x-x\cos\lambda x)}{a^{2}+x^{2}}\bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=+\infty}=\frac{x}{a^{2}+x^{2}} \quad (-\infty<x<+\infty).$$

故展式(1)成立.

*) 利用 3826 题的结果.

【3887】 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

解 由于 $f(x)$ 为连续的奇函数,故

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2\sin\lambda\pi}{\pi(1-\lambda^2)}.$$

于是,
$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x d\lambda\quad(-\infty<x<+\infty).$$

【3888】 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数,故

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\xi\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{\pi(1-\lambda^2)}.$$

于是,
$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda\quad(-\infty<x<+\infty).$$

【3889】 $f(t)=\begin{cases}A\sin\omega t, & |t|\leqslant\frac{2\pi n}{\omega},\\ 0, & |t|>\frac{2\pi n}{\omega}\end{cases}$ (n 为正整数).

解 由于 $f(t)$ 为连续的奇函数,故

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2A}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi n}{\omega}}\sin\omega\xi\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2A\omega\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\pi(\lambda^2-\omega^2)}.$$

于是,
$$f(t)=\frac{2A\omega}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2-\omega^2}\sin\lambda t d\lambda\quad(-\infty<t<+\infty).$$

【3890】 $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数,且绝对可积:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|x|}dx<+\infty,$$

故
$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha\xi}\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2\alpha}{\pi(\lambda^2+\alpha^2)}.$$

于是,
$$f(x)=e^{-\alpha|x|}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}d\lambda\quad(-\infty<x<+\infty).$$

【3891】 $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x$ $(\alpha>0)$.

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数,且绝对可积:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|x|}|\cos\beta x|dx\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|x|}dx<+\infty,$$

故
$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha\xi}\cos\beta\xi\cos\lambda\xi d\xi$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[\cos(\lambda+\beta)\xi+\cos(\lambda-\beta)\xi]e^{-\alpha\xi}d\xi=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\alpha}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}+\frac{\alpha}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2}\right].$$

于是,
$$e^{-\alpha|x|}\cos\beta x=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2}\right]\cos\lambda x d\lambda\quad(-\infty<x<+\infty).$$

【3892】 $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x$ $(\alpha>0)$.

解 由于 $f(x)$ 为连续的奇函数，且绝对可积：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|} |\sin\beta x| dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|} dx < +\infty,$$

故 $$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\xi}\sin\beta\xi\sin\lambda\xi d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} [\cos(\lambda-\beta)\xi - \cos(\lambda+\beta)\xi] e^{-\alpha\xi} d\xi = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\alpha}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2} + \frac{\alpha}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}\right].$$

$$= \frac{4\lambda\alpha\beta}{\pi[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}.$$

于是， $$e^{-\alpha|x|}\sin\beta x = \frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\lambda\sin\lambda x}{[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]} d\lambda \quad (-\infty < x < +\infty).$$

【3893】 $f(x) = e^{-x^2}$.

提示 注意 $f(x)$ 为连续的偶函数，利用 3809 题的结果，易得

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x d\lambda \quad (-\infty < x < +\infty).$$

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数，且绝对可积：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} < +\infty,$$

故 $$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}{}^{*)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

于是， $$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x d\lambda \quad (-\infty < x < +\infty).$$

*) 利用 3809 题的结果.

【3894】 $f(x) = xe^{-x^2}$

解 由于 $f(x)$ 为连续的奇函数，且绝对可积：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xe^{-x^2}| dx = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx < +\infty,$$

故

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \xi e^{-\xi^2}\sin\lambda\xi d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin\lambda\xi d(-e^{-\xi^2})$$

$$= -\frac{1}{\pi}e^{-\xi^2}\sin\lambda\xi\Big|_0^{+\infty} + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\lambda\xi d\xi = \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\lambda\xi d\xi = \frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}{}^{*)}$$

$$= \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

于是， $$xe^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda x d\lambda \quad (-\infty < x < +\infty).$$

*) 利用 3809 题的结果.

【3895】 用傅里叶积分来表示函数

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < +\infty).$$

(1)用偶式延拓； (2)用奇式延拓.

解 首先，我们注意到函数 e^{-x} 在 $[0, +\infty]$ 内连续且绝对可积：$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 < +\infty$，故对于

(1) 若用偶式延拓，则有

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\cos\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

于是， $$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2} d\lambda \quad (0 < x < +\infty).$$

由于按偶式延拓的函数在点 $x=0$ 连续，故上式当 $x=0$ 时也成立，即上式成立的范围是 $0\leqslant x<+\infty$.

(2)若用奇式延拓，则有

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\xi}\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

于是，

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda\quad(0<x<+\infty).$$

但当 $x=0$ 时上式不成立. 事实上，左端的值为 1，而右端的值为零.

对于下列函数 $f(t)$，求傅里叶变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-itx}dt:$$

【3896】 $f(x)=e^{-\alpha|x|}\quad(\alpha>0)$.

解 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}(\cos tx-i\ \sin tx)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}\cos txdt$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos txdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}.$$

【3897】 $f(x)=xe^{-\alpha|x|}\quad(\alpha>0)$.

解 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\alpha|t|}e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\alpha|t|}(\cos tx-i\ \sin tx)dt=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}i\int_0^{+\infty}te^{-\alpha t}\sin txdt.$

由于

$$I=\int_0^{+\infty}te^{-\alpha t}\sin txdt=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}t\sin tx\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}(\sin tx+tx\cos tx)dt$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\sin txdt+\frac{x}{\alpha}\int_0^{+\infty}te^{-\alpha t}\cos txdt=\frac{x}{\alpha(\alpha^2+x^2)}-\frac{x}{\alpha^2}e^{-\alpha t}t\cos tx\Big|_0^{+\infty}+\frac{x}{\alpha^2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}(\cos tx-tx\sin tx)dt$$

$$=\frac{x}{\alpha(\alpha^2+x^2)}+\frac{x}{\alpha^2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos txdt-\frac{x^2}{\alpha^2}\int_0^{+\infty}te^{-\alpha t}\sin txdt=\frac{x}{\alpha(\alpha^2+x^2)}+\frac{x\alpha}{\alpha^2(\alpha^2+x^2)}-\frac{x^2}{\alpha^2}I,$$

故有

$$\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)I=\frac{2x}{\alpha(\alpha^2+x^2)}\quad\text{或}\quad I=\frac{2\alpha x}{(\alpha^2+x^2)^2}.$$

于是，

$$F(x)=-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha x}{(\alpha^2+x^2)^2}.$$

【3898】 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

解 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}(\cos tx-i\ \sin tx)dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos txdt$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}{}^{*)}=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

*） 利用 3809 题的结果.

【3899】 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x$.

解 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\alpha t\cdot e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\alpha t\cdot(\cos tx-i\sin tx)dt$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\alpha t\cos txdt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}[\cos(\alpha+x)t+\cos(\alpha-x)t]dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(\alpha+x)tdt+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(\alpha-x)tdt\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{2}}\right]^{*)}=e^{-\frac{\alpha^2+x^2}{2}}\cdot\frac{e^{-\alpha x}+e^{\alpha x}}{2}=e^{-\frac{\alpha^2+x^2}{2}}\text{ch}\alpha x.$$

*） 利用 3809 题的结果.

【3900】 求函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$，设：

(1) $\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\mathrm{d}y=\frac{1}{1+x^2}$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$　$(x>0)$.

解 (1)令 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续且绝对可积，故按偶函数延拓，有展式

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\mathrm{d}y\quad(x\geqslant0),$$

其中
$$\varphi(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\lambda)\cos\lambda y\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda y}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-y*)}=\mathrm{e}^{-y}.$$

由此可知，函数 $\varphi(y)=\mathrm{e}^{-y}$ $(y\geqslant0)$即满足

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\mathrm{d}y\quad(x\geqslant0),$$

显然 $x<0$ 时此式也成立，因为

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+(-x)^2}=\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos(-x)y\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\mathrm{d}y.$$

(2) 同样，令 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$ $(x>0)$，则 $g(x)$在$(0,+\infty)$上连续且绝对可积，故按奇函数延拓，有展式

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\mathrm{d}y\quad(x>0),$$

其中
$$\psi(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}g(\lambda)\sin\lambda y\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\sin\lambda y\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\,\frac{y}{1+y^2}\quad(y\geqslant0).$$

由此可知，函数 $\psi(y)=\frac{2}{\pi}\,\frac{y}{1+y^2}$ $(y\geqslant0)$即满足

$$\mathrm{e}^{-x}=\int_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\mathrm{d}y\quad(x>0).$$

*） 利用 3825 题的结果.

[General Information]
书名=Б．П.吉米多维奇数学分析习题集题解　5　第4版
作者=费定晖，周学圣编演
页数=266
SS号=13245866
DX号=
出版日期=2012.09
出版社=山东科学技术出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第六章　多元函数微分学
1. 函数的极限．连续性
2. 偏导数．函数的微分
3. 隐函数的微分法
4. 变量代换
5. 几何上的应用
6. 泰勒公式
7. 多元函数的极值
第七章　带参数的积分
1. 带参数的常义积分
2. 带参数的广义积分．积分的一致收敛性
3. 广义积分号下的微分法和积分法
4. 欧拉积分
5. 傅里叶积分公式